ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico dovuto ad una corrente costante, elicoidale.* Nota di G. PICCIATI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nei trattati di Fisica si studia, per l'importanza che ha nelle applicazioni, il campo dovuto ad una corrente che circola in un filo avvolto ad elica sopra un cilindro (rocchetto) in modo che le spire siano equidistanti e tali che la distanza fra due di esse sia infinitesima rispetto al raggio. Se il rocchetto ha una lunghezza teoricamente infinita, praticamente assai grande rispetto al raggio, si determinano le proprietà del campo magnetico dovuto ad una corrente costante [1] valendosi delle proprietà del campo dovuto ad una corrente circolare, o del principio dell'equivalenza fra una corrente in un circuito chiuso ed una lamina magnetica avente lo stesso perimetro. Lo studio così fatto del campo prodotto da una corrente elicoidale, limitato inoltre al caso in cui il passo è infinitesimo, è tutt'altro che completo ed esauriente: si può invece effettuare in modo completo e qualunque sia il passo dell'elica: l'esposizione dei resultati ottenuti forma oggetto della presente Nota. Si assegnano in generale le componenti della forza elettrica e magnetica per i punti interni ed esterni al cilindro su cui è tracciata l'elica; quando si consideri il passo infinitesimo rispetto al raggio del cilindro si ritrovano per il campo magnetico le proprietà note. Particolari proprietà presenta il campo, qualunque sia il passo, per i punti dell'asse o ad esso vicinissimi: le due forze, elettrica e magnetica, sono fra loro ortogonali, quella elettrica è diretta secondo la normale all'elica, quella magnetica ha inclinazione costante sull'asse.

1. Si consideri un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile ed in quiete, in cui sia immerso un conduttore filiforme indefinito disposto ad elica di parametro $m > 0$. Si supponga l'elica percorsa da una corrente di intensità costante; se si indicano con F , U , V , W i potenziali elettrostatico e vettore relativi a questa corrente (indipendenti dal tempo), è noto [2] che le componenti della forza elettrica (X , Y , Z) e magnetica (L , M , N) secondo

[1] V. per es. Ròiti, *Elementi di Fisica*, vol. II; o, per maggior dettaglio, il *Cours d'Électricité* par H. Pellat, T. II, Paris, 1903.

[2] Vedi T. Levi-Civita, *Sur le champ électromagnétique* ecc., Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, ser. III, t. IV, 1902.

tre assi ortogonali, orientati nel modo solito, sono:

$$X = -\frac{dF}{dx}\,,\quad Y = -\frac{dF}{dy}\,,\quad Z = -\frac{dF}{dz}\,, \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\,,\\ M &= \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\,,\\ N &= \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'equazione a cui i potenziali F, U, V, W debbono soddisfare si riduce a $\Delta_2 = 0$, e per il principio della conservazione dell'elettricità deve inoltre sussistere fra loro la relazione

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0. \tag{3}$$

Riferiamoci a coordinate elicoidali legate alle cartesiane dalle relazioni

$$x = \varrho_1 \cos\varrho_3\,,\quad y = \varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3\,,\quad z = \varrho_2 + m\varrho_3\,,\quad (m > 0) \tag{4}$$

e corrisponda l'elica data ai valori $\varrho_1' = R$, $\varrho_2' = 0$; supponendo in essa la corrente diretta in modo da formare un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse z. Se I è la misura della intensità di corrente in unità elettromagnetiche, le componenti u, v, w dell'intensità, in unità elettrostatiche, secondo x, y, z, sono

$$Au = -\frac{RI}{\sqrt{R^2+m^2}}\operatorname{sen}\varrho_3'\,,\quad Av = \frac{RI}{\sqrt{R^2+m^2}}\cos\varrho_3'\,,\quad Aw = \frac{mI}{\sqrt{R^2+m^2}}\,;$$

quindi, essendo inoltre la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti del filo data da $e = I$, avremo che i potenziali relativi alla corrente, che per un momento immaginiamo limitata al tratto d'elica compreso fra i valori $\varrho_3' = -\theta_1$, $\varrho_3' = \theta_2$, sono:

$$F = I\sqrt{R^2+m^2}\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\varrho_3'}{r} + \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\,, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} U &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{Au\sqrt{R^2+m^2}}{r}\,d\varrho_3' = -RI\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{\operatorname{sen}\varrho_3'}{r}\,d\varrho_3'\,,\\ V &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{Av\sqrt{R^2+m^2}}{r}\,d\varrho_3' = RI\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\varrho_3'}{r}\,d\varrho_3'\,,\\ W &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{Aw\sqrt{R^2+m^2}}{r}\,d\varrho_3' = mI\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\varrho_3'}{r}\,, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

essendo $r = \sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}$ la distanza del punto potenziato P, di coordinate $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, dal generico punto potenziante $(R, 0, \varrho_3')$ dell'elica; E_1, E_2 le cariche degli estremi del tratto considerato, r_1, r_2 le loro distanze da P. I coseni che le direzioni $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ formano con $x\,y\,z$ essendo $\cos\varrho_3, \operatorname{sen}\varrho_3, 0$; $0, 0, 1$; $\frac{-\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}, \frac{\varrho_1 \cos\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}, \frac{m}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}$ se indichiamo le componenti del potenziale vettore secondo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ con V_1, V_2, V_3, fra esse ed U V W avremo:

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
U &= V_1 \cos\varrho_3 - \frac{\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3 ,\\
V &= V_1 \operatorname{sen}\varrho_3 + \frac{\varrho_1 \cos\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3 ,\\
W &= V_2 + \frac{m}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3 ,
\end{aligned}
\right.
$$

quindi per le (6) otteniamo

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
V_1 &= IR \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3' ,\\
V_2 &= Im \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho_3'}{r} - \frac{ImR}{\varrho_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3' ,\\
V_3 &= \frac{IR\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}{\varrho_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3' .
\end{aligned}
\right.
$$

La determinazione di F, V_1, V_2, V_3 ci fa quindi conoscere per le precedenti e per le (1) e (2) il campo elettromagnetico prodotto dalla corrente. Si noti che l'equazioni in coordinate elicoidali a cui sono soggette F, V_1, V_2, V_3 si possono facilmente dedurre da quelle a cui sono soggette, in coordinate cartesiane, F, U, V, W.

2. Passiamo ora al caso limite di un'elica indefinita; per il potenziale elettrostatico F, che si riduce alla funzione potenziale di una massa ad una dimensione distribuita sopra l'elica, si ha [1] un'espressione in serie distinta in due tipi, valevoli uno per i punti interni al cilindro, l'altro per i punti esterni. Posto $\theta = \frac{\varrho_2}{m}$ si ha:

$$F = I\sqrt{R^2 + m^2} \,.\, \omega$$

[1] Vedi la mia Nota: *Sulle funzioni potenziali elicoidali.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, dicembre 1904.

essendo

$$(9)\quad \omega = -\frac{2}{m}\left\{\log R - \pi \sum_1^\infty {}_n\, i\, H_1^n\left(\frac{inR}{m}\right) J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\cos n\theta\right\} \text{ per } \varrho_1 < R$$

$$(10)\quad \omega = -\frac{2}{m}\left\{\log \varrho_1 - \pi \sum_1^\infty {}_n\, i\, H_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) J^n\left(\frac{inR}{m}\right)\cos n\theta\right\} \text{ per } \varrho_1 > R$$

indicando J^n la funzione cilindrica di 1ª specie ed H_1^n la funzione cilindrica di Hankel.

Per le componenti del potenziale vettore date dalle (8) non è possibile senz'altro il passaggio al caso limite se prima non ci si assicura che gli integrali $\int \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{r} d\varrho_3'$, $\int \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r} d\varrho_3'$ hanno un senso anche quando si estendono fra limiti infiniti; ciò che si verifica facilmente.

Si considerino infatti i due integrali

$$(11)\quad \begin{cases} \omega_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}}\, d\varrho_3' \\ \omega_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}}\, d\varrho_3' \end{cases}$$

e si ponga $\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3') = m\lambda$, $\frac{\varrho_2}{m} = \theta$: avremo:

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \theta)\, d\lambda}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2}} - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\lambda + \theta)\, d\lambda}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2}} \\ \omega_3 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda - \theta)\, d\lambda}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2}} + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda + \theta)\, d\lambda}{\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2}} \end{cases}$$

Si ricordi ora la proprietà seguente sostanzialmente nota: « Se $f(x)$ è una funzione positiva, costantemente crescente fra un certo valore di x e ∞, le funzioni $\frac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$, $\frac{\cos x}{f(x)}$ sono integrabili sino all'infinito ». Essendo quindi

$$\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2} \text{ e } \sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2},$$

da un certo valore di λ in poi, funzioni di λ costantemente crescenti, si conclude che gli integrali che compariscono in ω_1 ed ω_3 hanno un senso ben determinato, riducendosi ω_1 ed ω_3 a due funzioni di ϱ_1 e θ. Per le espressioni (12) di ω_1 ed ω_3 si riconosce inoltre che esse sono funzioni regolari per $\varrho_1 \lesssim \mathrm{R}$ e periodiche in θ; essendo inoltre ω_1 funzione dispari di θ, mentre ω_3 è pari, si deve poter sviluppare ω_1 in serie di seni, ed ω_3 in serie di coseni.

Per questo si osservi che, posto $\tau = \mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 + m^2\lambda^2$, si ha per $\varrho_1 \lesssim \mathrm{R}$, qualunque sia θ variabile fra 0 e 2π, lo sviluppo:

$$\operatorname{sen}(\lambda - \theta)\left[\tau - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \theta)\right]^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}(\lambda + \theta)\left[\tau - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \theta)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n (\mathrm{R}\varrho_1)^n \tau^{-\frac{1}{2}-n} . \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \times$$

$$\times \left[\operatorname{sen}(\lambda - \theta) . \cos(n - 2s)(\lambda - \theta) - \operatorname{sen}(\lambda + \theta)\cos(n - 2s)(\lambda + \theta)\right]$$

$$= 2 \sum_{n=1}^\infty (\mathrm{A}_{n+2} - \mathrm{A}_n) \cos n\lambda . \operatorname{sen} n\theta$$

avendo posto

$$\mathrm{A}_n = \sum_{r=0}^\infty \binom{n-1+2r}{r} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1+2r} (-1)^{n-1+2r} (\mathrm{R}\varrho_1)^{n-1+2r} \tau^{-\frac{1}{2}-(n-1)-2r} . \tag{13}$$

Analogamente si trova

$$\cos(\lambda - \theta)\left[\tau - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \theta)\right]^{-\frac{1}{2}} + \cos(\lambda + \theta)\left[\tau - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \theta)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\mathrm{A}_2 + 2 \sum_{n=1}^\infty (\mathrm{A}_{n+2} + \mathrm{A}_n) \cos n\lambda . \cos n\theta .$$

Si ricordi ora che per una notevole formola di Sonin (1) si ha

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{J}^\nu(xt)\, t^{\nu+1}}{(t^2 + y^2)\, \varrho^{+1}}\, dt = \frac{\pi i\, x^\varrho (iy)^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\, \Gamma(1+\varrho)}\, \mathrm{H}_1^{\nu-\varrho}(xyi),$$

quindi anche

$$\int_0^\infty \frac{\cos n\lambda . d\lambda}{\tau^{n+2r-\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{\pi n\lambda}{2}}\, \mathrm{J}^{-\frac{1}{2}}(n\lambda)\, d\lambda}{(m^2\lambda^2 + \mathrm{R}^2 + \varrho_1^2)^{n+2r-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi n}{2}} . m^{1-2n-4r}\, \pi i (n)^{n+2r-\frac{3}{2}} \left(\frac{i\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2}}{m}\right)^{-n-2r+1}}{2^{n+2r-\frac{1}{2}}\, \Gamma(n + 2r - \frac{1}{2})}\, \mathrm{H}_1^{-n-2r+1}\left(\frac{in\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2}}{m}\right);$$

(1) Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1904, pag. 221.

perciò otteniamo

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \int_0^\infty \mathrm{A}_n \cos n\lambda \,.\, d\lambda = \\
&= \frac{\pi i}{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r)!\,(n-1+r)!} \left(\frac{in\mathrm{R}\varrho_1}{2m\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}}\right)^{n-1+2r} \mathrm{H}_1^{n-1+2r}\left(\frac{in\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}}{m}\right) \\
\mathrm{B}_{n+2} &= \int_0^\infty \mathrm{A}_{n+2} \cos n\lambda \,.\, d\lambda = \\
&= \frac{\pi i}{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r)!\,(n+1+r)!} \left(\frac{in\mathrm{R}\varrho_1}{2m\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}}\right)^{n+1+2r} \mathrm{H}_1^{n+1+2r}\left(\frac{in\sqrt{\mathrm{R}^2+\varrho_1^2}}{m}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Dalle (12) abbiamo perciò

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega_1 &= 2\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{B}_{n+2} - \mathrm{B}_n) \operatorname{sen} n\theta \\
\omega_3 &= 2\int_0^\infty \mathrm{A}_2\, d\lambda + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{B}_{n+2} + \mathrm{B}_n) \cos n\theta .
\end{aligned}
\right.
$$

Per poter dare alle espressioni di ω_1 ed ω_3 una forma più semplice ed elegante, ricorriamo ora alle equazioni a cui esse debbono soddisfare.

3. Si ricordi che $\mathrm{F}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ debbono soddisfare, in coordinate $x\,y\,z$, all'equazioni

$$
\Delta_2 \mathrm{F} = 0 \;,\; \Delta_2 \mathrm{U} = 0 \;,\; \Delta_2 \mathrm{V} = 0 \;,\; \Delta_2 \mathrm{W} = 0 \;,\; \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz} = 0
$$

e che fra esse e le $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$ sussistono le relazioni (7). Inoltre per le (8), (9), (11) si ha

$$
(16)\qquad \mathrm{F} = \mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}\,.\,\omega \;,\; \mathrm{V}_1 = \mathrm{IR}\omega_1 \;,\; \mathrm{V}_2 = \mathrm{I}m\left(\omega - \frac{\mathrm{R}}{\varrho_1}\,\omega_3\right),
$$

$$
\mathrm{V}_3 = \frac{\mathrm{IR}\sqrt{\varrho_1^2+m^2}}{\varrho_1}\,\omega_3
$$

con $\omega, \omega_1, \omega_3$ funzioni delle sole ϱ_1, θ; quindi essendo, per le (4), in coordinate elicoidali

$$
\Delta_2 = \frac{d^2}{d\varrho_{21}} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d}{d\varrho_1} + \left(1+\frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{2}{\varrho_1^2}\frac{d^2}{d\theta\, d\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{d^2}{d\varrho_3^2},
$$

si ottengono per ω_1, ω_3, posto

$$
\Delta_2' = \frac{d^2}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d}{d\varrho_1} + \left(1+\frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{d\theta^2},
$$

e tenendo conto che $\Delta_2'\omega = 0$, le seguenti equazioni

$$(17)\qquad \begin{cases} \Delta'_2\,\omega_1 = \dfrac{\omega_1}{\varrho_1^2} - \dfrac{2}{\varrho_1^2}\dfrac{d\omega_3}{d\theta}\,, \\[2mm] \Delta'_2\,\omega_3 = \dfrac{\omega_3}{\varrho_1^2} + \dfrac{2}{\varrho_1^2}\dfrac{d\omega_1}{d\theta}\,, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \frac{d\omega_1}{d\varrho_1} + \frac{\omega_1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\omega_2}{d\theta} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\omega}{d\theta} = 0\,.$$

Dalle prime due si ricava per $\Omega = \omega_3 + i\omega_1$ l'equazione

$$(19)\qquad \Delta'_2\,\Omega = \frac{\Omega}{\varrho_1^2} - i\,\frac{2}{\varrho_1^2}\frac{d\Omega}{d\theta}\,,$$

onde, posto

$$\Omega = c_0 + i\,c'_0 + \sum_1^\infty \left[c_n\,e^{in\theta} + c'_n\,e^{-in\theta}\right]$$

con $c_n\,, c'_n$ funzioni di ϱ_1, si ha dalla (19)

$$\frac{d^2c_0}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{dc_0}{d\varrho_1} = \frac{c_0}{\varrho_1^2}\,;$$

$$\frac{d^2c_n}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{dc_n}{d\varrho_1} - \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{n^2}{m^2}\,c_n = \frac{c_n}{\varrho_1^2}\,(1+2n)\,;$$

ed analogamente per $c'_0\,, c'_n$. Si trae intanto

$$c_0 = a_0\,\varrho_1 + \frac{b_0}{\varrho_1}\quad , \quad c'_0 = a'_0\,\varrho_1 + \frac{b'_0}{\varrho_1}$$

con $a_0\,, a'_0\,, b_0\,, b'_0$ costanti: inoltre, posto $\xi = \dfrac{in\varrho_1}{m}$, si ha

$$\frac{d^2c_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dc_n}{d\xi} + \left[1 - \frac{(n+1)^2}{\xi^2}\right]c_n = 0$$

quindi per $c_n\,, c'_n$ otteniamo

$$c_n = a_n\,\mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right);\quad c'_n = a'_n\,\mathrm{J}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + b'_n\,\mathrm{Y}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

con $a_n\,, b_n\,, a'_n\,, b'_n$ costanti. Le espressioni di ω_1 ed ω_3 assumono quindi, per la posizione fatta, la forma

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_3 = a_0\,\varrho_1 + \dfrac{b_0}{\varrho_1} + \displaystyle\sum_1 \left(a_n\,\mathrm{J}^{n+1} + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1} + a'_n\,\mathrm{J}^{n-1} + b'_n\,\mathrm{Y}^{n-1}\right)\cos n\theta\,, \\[2mm] \omega_1 = a'_0\,\varrho_1 + \dfrac{b'_0}{\varrho_1} + \displaystyle\sum_1^\infty \left(a_n\,\mathrm{J}^{n+1} + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1} - a'_n\,\mathrm{J}^{n-1} - b'_n\,\mathrm{Y}^{n-1}\right)\operatorname{sen} n\theta\,, \end{cases}$$

l'argomento delle funzioni cilindriche essendo $\frac{in\varrho_1}{m}$; restano però da determinare i coefficienti costanti che in esse compariscono.

Questo è reso assai facile per il confronto fra le espressioni (20) e le (15); è necessario però distinguere i due casi in cui è $\varrho_1 < \mathrm{R}$ o $\varrho_1 > \mathrm{R}$. Sia dapprima $\varrho_1 < \mathrm{R}$; restando ω_1, ω_3 regolari insieme alle loro derivate anche per $\varrho_1 = 0$ dovremo nelle (20) fare $b_0 = b_0' = b_n = b_n' = 0$, onde escludere la singolarità in $\varrho_1 = 0$. Il confronto fra le (20) e le (15) dà allora

$$a_0' = 0 \,, \quad a_0\,\varrho_1 = 2\int_0^\infty \mathrm{A}_2\, d\lambda \,,$$

$$a_n\, \mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) = 2\mathrm{B}_{n+2} \quad ; \quad a_n'\, \mathrm{J}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) = 2\mathrm{B}_n \,.$$

Per l'espressione di A_2 che si ha dalla (13) resulta intanto $a_0 = \frac{1}{\mathrm{R}m}$; si ha inoltre

$$a_n \,.\left[\frac{\mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)}{\varrho_1^{n+1}}\right]_{\varrho_1=0} = 2\left[\frac{\mathrm{B}_{n+2}}{\varrho_1^{n+1}}\right]_{\varrho_1=0}$$

ossia

$$a_n\,\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{in}{2m}\right)^{n+1} = \frac{\pi i}{m}\,\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{in}{2m}\right)^{n+1}\mathrm{H}_1^{n+1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right),$$

quindi, avendosi una formula analoga per a_n', si ha

$$a_n = \frac{\pi i}{m}\,\mathrm{H}_1^{n+1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right) \quad ; \quad a_n' = \frac{\pi i}{m}\,\mathrm{H}_1^{n-1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right).$$

Le espressioni di ω_1, ω_2 sono quindi:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi i}{m}\sum_1^\infty{}_n\left[\mathrm{H}_1^{n+1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) - \right.\\ &\qquad\left. - \mathrm{H}_1^{n-1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\right]\mathrm{sen}\, n\theta \\ \omega_3 &= \frac{\varrho_1}{\mathrm{R}m} + \frac{\pi i}{m}\sum_1^\infty{}_n\left[\mathrm{H}_1^{n+1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + \mathrm{H}_1^{n-1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\right]\cos n\theta \end{aligned}\right. \qquad \text{per } \varrho_1 < \mathrm{R}$$

Supponiamo ora $\varrho_1 > \mathrm{R}$: fissato ϱ_1 supponiamo R variabile; data la simmetria di ω_1, ω_3 in R e ϱ_1 esse dovranno essere in R, per $\mathrm{R} < \varrho_1$, dello stesso tipo che in ϱ_1, per $\varrho_1 < R$, ed inoltre regolari per $R = 0$; onde si ha

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi i}{m}\sum_1^\infty n\left[H_1^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right) - \right.\\ &\qquad\left. - H_1^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n-1}\left(\frac{inR}{m}\right)\right]\operatorname{sen} n\theta \\ \omega_3 &= \frac{R}{\varrho_1 m} + \frac{\pi i}{m}\sum_1^\infty n\left[H_1^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right) + \right.\\ &\qquad\left. + H_1^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n-1}\left(\frac{inR}{m}\right)\right]\cos n\theta \end{aligned}\right.\quad \text{per } \varrho_1 > R$$

Si osservi che in ambedue i casi le espressioni così determinate di $\omega, \omega_1, \omega_3$ verificano la (18).

Riepilogando: le (16) ci fanno conoscere i potenziali del campo dovuto alla corrente sia per $\varrho_1 < R$ mediante le (9) (21), sia per $\varrho_1 > R$ mediante le (10) (22).

Per $R = 0$ otteniamo in quest' ultimo caso i noti potenziali di una corrente costante rettilinea indefinita. Si hanno ora tutti gli elementi per procedere all'esame del campo prodotto dalla corrente; a questo si prestano meglio le componenti delle forze elettromagnetiche secondo x, y, z.

Le espressioni di queste componenti X, Y, Z, L, M, N si ottengono facilmente dalle (1) (2) tenendo conto delle formole di trasformazione (4) e delle (7), (16): in esse compariscono le $\omega, \omega_1, \omega_3$. La sostituzione ad $\omega, \omega_1, \omega_3$ dei corrispondenti valori (9) e (21) per $\varrho_1 < R$ oppure (10) e (22) per $\varrho_1 > R$ dà i valori cercati delle forze elettromagnetiche per i punti interni od esterni al cilindro su cui è tracciata l'elica.

Non potendo dilungarmi [1], mi limito solo ad osservare che per i punti dell'asse o ad esso vicinissimi, cioè per $\varrho_1 = 0$ od infinitesimo, il campo presenta la particolarità accennata nella prefazione. Così se si considera il caso in cui il passo $2\pi m$ sia infinitesimo rispetto a $2\pi R$, in modo da essere $\frac{m}{R}$ trascurabile, essendo però nel tempo stesso una quantità finita $\frac{I}{m} = 2\pi I \frac{1}{2\pi m} = 2\pi I\mu$, indicando μ il numero delle spire per unità di lunghezza, si ritrovano, valendosi degli sviluppi assintotici delle funzioni cilindriche [2] per valori grandissimi dell'argomento, le note proprietà dei rocchetti [3]: cioè per i punti interni il campo magnetico è uniforme, parallelo all'asse del cilindro, alla sinistra dell'osservatore di Ampère rivolto verso l'asse, e di intensità $4\pi I\mu$; all'esterno è nullo.

(1) Mi propongo di esporre in seguito nei loro particolari le proprietà del campo di un solenoide.

(2) Nielsen, l. c., pag. 156.

(3) Pellat, l. c., pag. 64 e seg.