

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

**Fisica matematica.** — *Sulla teoria del solenoide elettrodinamico.* Nota del prof. GIUSEPPE PICCIATI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

**Fisiopatologia.** — *Sull'evoluzione della sensibilità nelle cicatrici, nelle plastiche e negli innesti.* Nota di GUIDO LERDA, presentata dal Socio A. MOSSO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Sull'osservazione spettroscopica della luce di intensità periodicamente variabile.* Nota del dott. O. M. CORBINO, presentata dal Corrispondente D. MACALUSO.

1. Facendo subire a un fascio di luce, primitivamente omogenea, alterazioni periodiche molto rapide nell'intensità, si debbono produrre dei cambiamenti nello spettro della luce medesima. La previsione di tali cambiamenti conduce però ad alcune difficoltà quando si voglia tener conto delle proprietà reali dello spettroscopio, oltre che della sua funzione teorica, di scomporre, cioè, in componenti sinusoidali di Fourier lo stato vibratorio che si ha sulla fenditura.

Mi propongo in questa Nota di esaminare il problema e di discutere le condizioni sperimentali che permetterebbero di ritrovare gli interessanti fenomeni previsti.

2. Una vibrazione luminosa primitivamente sinusoidale, cui si faccia subire una variazione periodica nell'ampiezza si può porre, nel caso più generale, sotto la forma

$$(1) \quad s = \varphi(t) \operatorname{sen} \omega t$$

indicando con  $\varphi(t)$  una funzione periodica di cui sia  $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$  il periodo.

La (1) è rappresentabile graficamente con una senoide ad ampiezza lentamente variabile, in tutti i casi in cui  $\varphi(t)$  varia pochissimo durante il periodo

$T = \frac{2\pi}{\omega}$  di  $\operatorname{sen} \omega t$ ; ciò avviene sempre per i fenomeni luminosi.

Scomponendo  $\varphi(t)$  in serie di Fourier, ponendo cioè

$$\varphi(t) = \sum_m a_m \cos(m\omega't + \alpha_m)$$

si avrà

$$s = \sum_m a_m \cos(m\omega't + \alpha_m) \sin \omega t$$

di cui il termine generale è equivalente a

$$(2) \quad a_m \{ \sin [(\omega + m\omega')t + \alpha_m] + \sin [(\omega - m\omega')t - \alpha_m] \}$$

cioè a due vibrazioni persistenti di pulsazioni  $\omega + m\omega'$ ,  $\omega - m\omega'$ , cui corrispondono due righe simmetricamente poste rispetto alla riga della luce primitiva e a distanze da questa proporzionali a  $m\omega'$ . Ai vari armonici di  $\varphi(t)$  corrisponderanno quindi delle coppie di righe simmetriche rispetto alla primitiva, di intensità proporzionale a quella dell'armonico relativo nella funzione  $\varphi(t)$ , risultandone da entrambe le parti, uno spettro discontinuo a righe fisse equidistanti.

3. Tutto ciò presuppone però nell'apparato spettroscopico un potere separatore infinito (che cioè in ogni punto dello spettro si abbia soltanto luce sinusoidale di un periodo unico), o per lo meno un potere separatore tale che le diverse righe calcolate siano separate completamente.

Ben diverse possono essere le condizioni degli spettroscopi ordinari, cui corrispondono, per una determinata luce sinusoidale incidente, luci disperse in tutti gli azimut, con ampiezze presentanti dei massimi più o meno netti, a seconda del potere separatore dello spettroscopio medesimo.

In ogni punto dello spettro si sovrappongono con ciò luci di periodi notevolmente diversi, che si influenzano mutuamente; può quindi avvenire che per forme particolari della funzione  $\varphi(t)$ , cui corrisponda una non completa separazione delle varie righe dianzi previste, si abbiano nello spettro apparenze del tutto diverse.

Convieni pertanto ricercare se non sia possibile un altro modo di scomposizione della vibrazione di ampiezza periodicamente variabile, che non sia quello fondato sull'uso della serie di Fourier ma che si adatti meglio alle proprietà reali dello spettroscopio, quando esso non sia sufficiente alla separazione completa degli armonici di questa serie.

Se si pone, nell'ipotesi  $\varphi(t) < 1$ ,

$$(3) \quad s = \varphi(t) \sin \omega t = \sin [\omega t + \arccos \varphi(t)] + \sin [\omega t - \arccos \varphi(t)]$$

si può dimostrare che tale scomposizione, analiticamente legittima, identifica la luce di intensità variabile con un fenomeno di battimenti tra due luci aventi numeri di vibrazioni periodicamente variabili, e cui corrispondono, in certi casi, due righe oscillanti nello spettro.

Consideriamo infatti, la prima delle due vibrazioni componenti. Essa è rappresentata da una funzione la quale si annulla a intervalli successivi di tempo  $\frac{T_1}{2}$  tali che vi corrisponda un accrescimento di  $\pi$  nell'argomento

$\omega t + \arccos \varphi(t)$ ; così se il seno si annulla successivamente per i due valori del tempo  $t$  e  $t + \frac{T_1}{2}$  sarà

$$(4) \quad \omega t + \arccos \varphi(t) = p\pi$$

$$(5) \quad \omega \left( t + \frac{T_1}{2} \right) + \arccos \varphi \left( t + \frac{T_1}{2} \right) = (p+1)\pi$$

ove  $p$  denota un numero intero.

L'intervallo  $\frac{T_1}{2}$  è molto prossimo a  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$  (semi-periodo di  $\sin \omega t$ ) data la lenta variazione di  $\varphi(t)$  col tempo in confronto della variazione di  $\sin \omega t$ . Si può quindi considerare come piccolissimo l'accrescimento di  $\varphi(t)$ , e quindi di  $\arccos \varphi(t)$ , nel tempo  $\frac{T_1}{2}$ , e calcolare questi accrescimenti con lo sviluppo in serie di Taylor limitato al secondo termine.

Si avrà con ciò:

$$\varphi \left( t + \frac{T_1}{2} \right) = \varphi(t) + \frac{T_1}{2} \varphi'(t)$$

e

$$\begin{aligned} \arccos \varphi \left( t + \frac{T_1}{2} \right) &= \arccos \left[ \varphi(t) + \frac{T_1}{2} \varphi'(t) \right] \\ &= \arccos \varphi(t) + \frac{1/2 T_1 \varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (5) e tenendo presente la (4) si ha quindi

$$\left[ \omega - \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}} \right] \frac{T_1}{2} = \pi$$

la quale confrontata con

$$\omega \frac{T}{2} = \pi$$

ove  $T$  è il periodo di  $\sin \omega t$ , e tenuto presente che, nel problema di cui ci occupiamo, il secondo termine della parentesi è sempre molto piccolo di fronte al primo, diviene

$$(6) \quad T_1 = T \left[ 1 + \frac{1}{\omega} \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}} \right].$$

L'intervallo  $T_1$  è quindi funzione periodica del tempo, avente per periodo quello di  $\varphi(t)$ .

In modo analogo si trova per l'altra componente

$$(7) \quad T'_1 = \left[ 1 - \frac{1}{\omega} \frac{\varphi'(t)}{1 - \varphi^2(t)} \right].$$

In un spettroscopio di potere separatore sufficientemente elevato, queste due luci di numeri di vibrazioni variabili dovrebbero dare uno spettro discontinuo con righe di intensità costante.

Ma può darsi, invece, che la  $\varphi(t)$  abbia una forma tale da risultarne per le due componenti un periodo che cambia lentamente, pur avendosi una ampiezza di variazione notevole. In tal caso con uno spettroscopio ordinario, per l'azione mutua delle varie componenti che si sovrappongono in ogni punto dello spettro, la luce considerata darà anzichè uno spettro a molte righe  *fisse* , un semplice  *doublet*  a componenti oscillanti.

Si immagini, per esempio, che sia

$$(8) \quad \varphi(t) = \text{sen} [k \text{ sen } \omega' t]$$

con

$$k = 10^{10}, \quad \omega' = 2\pi \times 10,$$

In questa ipotesi la  $\varphi$  ha per periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$ , cioè 1/10 di minuto secondo, e quindi le varie componenti di Fourier della vibrazione

$$s = \varphi(t) \text{ sen } \omega t$$

in cui, per la luce del sodio, è

$$\omega = 2\pi \times 5 \times 10^{14}$$

e che avranno (v. § 2) le pulsazioni  $\omega + m\omega'$ , cioè

$$\omega + \omega', \quad \omega + 2\omega', \quad \omega + 3\omega', \dots$$

non possono venir separate da nessuno spettroscopio; nè è facile prevedere l'effetto della sovrapposizione delle componenti contigue.

Ricorriamo invece alla scomposizione data dalla (3). Le (6) e (7) divengono allora:

$$(9) \quad \begin{aligned} T_1 &= T \left[ 1 + \frac{1}{\omega} k\omega' \cos \omega' t \right] \\ T'_1 &= T \left[ 1 - \frac{1}{\omega} k\omega' \cos \omega' t \right] \end{aligned}$$

le quali ci dicono che la riga primitiva si scompone in un  *doublet* , di cui ciascuna componente è una luce di periodo lentamente variabile, tale cioè



che il numero di vibrazioni in un decimo di secondo, subisce una variazione massima di  $\frac{2}{\omega} k\omega' = \frac{2}{1000}$ .

Or è evidente che ognuna delle componenti sarà una riga mobile nello spettro <sup>(1)</sup>, e precisamente una riga che oscilla dieci volte in un secondo intorno alla riga normale, con un'ampiezza eguale circa al doppio della distanza tra le righe del sodio.

Può quindi avvenire che la  $\varphi(t)$ , pur essendo di periodo molto grande, determini delle modificazioni spettrali notevoli ben diverse da quelle che la semplice scomposizione di Fourier farebbe prevedere.

4. Si osservi che nell'esempio precedente l'ampiezza di oscillazione di una delle due righe mobili, cioè  $\frac{2}{\omega} k\omega'$ , dipende dal prodotto  $k\omega'$ ; cosicchè facendo variare  $k$  e  $\omega'$  in modo che il prodotto si mantenga costante, ma  $\omega'$  vada sempre crescendo, le oscillazioni della riga, conservando la stessa ampiezza, si andran facendo sempre più rapide. Supponiamo di giungere, con ciò, a molto grandi valori di  $\omega'$ ; data la rapidità delle oscillazioni, la riga mobile si vedrà come una banda, e sembra che le apparenze debbano restare identiche anche se  $\omega'$  è già divenuto tanto grande che, facendo la decomposizione con la serie di Fourier, le righe corrispondenti alle componenti dianzi calcolate siano completamente separate.

Per intendere come avvenga questa trasformazione di una banda generata da una riga mobile, in uno spettro a righe fisse, mentre  $\omega'$  cresce in modo continuo, si pensi che anche per oscillazioni lente della riga, tali oscillazioni sono un *effetto apparente* dell'interferenza tra le varie componenti che si sovrappongono, almeno in parte, in ogni punto dello spettro; interferenza che genera lo annullamento della luce in tutti i posti, tranne uno, quello cioè per cui passa, in quell'istante, la riga mobile osservata. In altri termini la riga oscillante è una manifestazione dell'annullamento periodico e con diversa fase delle varie righe in parte sovrapposte.

Si intende quindi che tale manifestazione debba cessare quando le varie righe siano completamente separate.

5. La forma attribuita alla  $\varphi$  nella eguaglianza (8) e la costanza del prodotto  $k\omega'$  non è d'altra parte una semplice astrazione analitica, ma corrisponde a un fenomeno che è possibile realizzare.

Una sorgente di luce monocromatica, capace di dar luogo al fenomeno Zeeman, si trovi in un campo magnetico di intensità variabile, come quello prodotto da una bobina percorsa da scariche oscillanti, e si consideri la luce emessa normalmente al campo, estinguendo con un nicol le vibrazioni parallele alle linee di forza.

(<sup>1</sup>) Basta pensare all'osservazione del fenomeno Zeeman dovuto a un campo lentamente variabile.

Per un campo costante si avrà allo spettroscopio un *doublet* le cui componenti si trovano a una distanza proporzionale all'intensità del campo. Per un campo variabile sinusoidalmente con pulsazione  $\omega'$  i periodi delle componenti saranno espressi quindi da relazioni analoghe alle (9), e vi corrisponderanno due righe oscillanti con pulsazione  $\omega'$ . Al crescere di  $\omega'$ , se il valore massimo del campo resta costante, le due righe tracceranno con velocità crescente una banda di ampiezza costante.

Tale banda, per  $\omega'$  grandissimo, dovrebbe poi scindersi in un sistema di righe equidistanti. Si noti però che, nel caso attuale, non è possibile giungere a tale scomposizione; bisognerebbe infatti che l'apparato spettrale riuscisse a separare le righe corrispondenti alle pulsazioni

$$\omega + \omega' \quad , \quad \omega + 2\omega' \quad , \quad \omega + 3\omega'$$

Or anche ammesso che le qualità della luce normale emessa dalla sorgente e la potenza dell'apparato spettroscopico permettessero di scomporre due righe come quelle corrispondenti a

$$\omega, \omega + 10^{-6}\omega$$

si dovrebbe avere per  $\omega'$

$$\omega' = 10^{-6}\omega$$

cioè

$$\omega' = 2\pi \times 5 \times 10^8$$

con che la bobina dovrebbe essere traversata da onde elettriche della lunghezza di 50 centimetri, la qual cosa deve ritenersi come impossibile data l'induttanza della bobina.

6. Ritornando al caso delle luci intermittenti, si può riconoscere senza difficoltà che nessun mezzo meccanico di alterazione dell'intensità di un fascio di luce può essere così rapido da determinare modificazioni spettrali rivelabili agli spettroscopi di cui noi disponiamo. Un risultato migliore si otterrebbe profittando della istantaneità del fenomeno della birefrangenza elettrica, quale risulta dalle belle esperienze di Abraham e Lemoine e dalle altre posteriori di James<sup>(1)</sup>; e che suggerisce un metodo molto comodo per avere fasci di luce rapidissimamente intermittenti.

Si sostituisca infatti, nel dispositivo di Abraham e Lemoine, alla luce della scintilla un fascio di luce ordinaria, si tolga il prisma birefrangente e si orienti il secondo nicol a 90° dal primo, cioè all'oscurità. Inoltre si faccia attraversare il condensatore da oscillazioni elettriche di grande frequenza.

L'ampiezza della vibrazione luminosa emergente varierà come  $\sin \pi \frac{\delta}{\lambda}$ ,  
ove  $\lambda$  indica la differenza di cammino tra il raggio ordinario e straordinario

<sup>(1)</sup> Ann. d. Phys. Bd. 15, fasc. 15, 1904.

generata dal campo variabile. Se le oscillazioni elettriche sono della lunghezza d'onda di 1 metro, il che non sembra difficile a ottenere, il fascio emergente sarà interrotto 600 milioni di volte a secondo, cosicchè nessun mezzo cinematico ne potrebbe rivelare la non continuità. La funzione  $g(t)$  avrebbe in tal caso come periodo  $\frac{1}{6 \times 10^8}$  di secondo; e le componenti più interne dello sviluppo in serie di Fourier dato al § 2, disterebbero quindi tra loro di circa  $\frac{2}{1000}$  della distanza tra le due righe del sodio.

Se il potere separatore dello spettroscopico è inferiore a questo limite, converrà ricorrere alla scomposizione discussa al § 3. Supponiamo che il campo H vari sinusoidalmente con periodo  $\frac{2\pi}{\omega'}$ , che sia cioè

$$H = H_0 \text{ sen } \omega' t.$$

La differenza di cammino, indicando con K una costante, è data allora da

$$\delta = K H_0^2 \text{ sen}^2 \omega' t$$

e la luce emergente si potrà rappresentare con

$$\text{sen } \pi \frac{\delta}{\lambda} \text{ sen } \omega t = \text{sen} [A \text{ sen}^2 \omega' t] \text{ sen } \omega t$$

ove si è posto

$$A = \frac{\pi K H_0^2}{\lambda}.$$

La (6) e la (7) divengono, data questa forma di  $g(t)$ ,

$$T_1 = T \left[ 1 + \frac{\omega'}{\omega} A \text{ sen } 2\omega' t \right]$$

$$T'_1 = T \left[ 1 - \frac{\omega'}{\omega} A \text{ sen } 2\omega' t \right].$$

Adunque la riga primitiva si trasformerà in un *doublet* di cui le componenti, mantenendosi simmetriche rispetto alla prima, oscillano pendolarmente intorno ad essa con periodo  $\frac{\pi}{\omega'}$ , e con ampiezza corrispondente ad  $A \frac{\omega'}{\omega}$ . Data la rapidità di queste oscillazioni l'occhio riceverà l'impressione di una banda avente la larghezza corrispondente a  $2A \frac{\omega'}{\omega}$ .

Nel caso di oscillazioni elettriche di un metro di lunghezza d'onda, e di un effetto Kerr di  $0.12 \lambda$ , quale sarebbe prodotto da due armature lunghe 20 cm., distanti 1 mm. e con differenza di potenziale massima eguale a



4000 Volt, l'ampiezza della banda sarà quindi solo di appena mezzo millesimo della distanza tra le due righe del sodio.

7. Un maggior numero di intermittenze per secondo può essere ottenuto ricorrendo alla luce stessa delle scintille negli oscillatori elettromagnetici, poichè la scintilla, finchè le velocità raggiunte con gli specchi giranti, han permesso di risolverla, è costituita da un fenomeno luminoso discontinuo.

Molto interessante, dal punto di vista che ci occupa, è il lavoro del Décombe (<sup>1</sup>), che riuscì a fotografare scariche oscillanti del periodo  $2 \times 10^{-7}$ , discutendo con grande cura le condizioni necessarie perchè le singole scintilline siano quanto più numerose e brillanti è possibile.

Una differenza rilevante si ha tra le scintille scoccanti nell'aria e quelle scoccanti in un dielettrico quale l'olio di vasellina suggerito dal Righi.

Nel secondo caso la scintilla, decomposta dallo specchio girante, oltre che più luminosa, è costituita da tratti rettilinei che in tutta la loro lunghezza seguono, col loro splendore, le variazioni della corrente di scarica; mentre nell'aria i segni della discontinuità sono soprattutto evidenti agli elettrodi, come risulta dalle bellissime fotografie di Battelli e Magri.

Intanto con oscillatori anche di piccola lunghezza d'onda, e scintilla scoccante nell'olio di vasellina, non è da escludere a priori che siano visibili le righe degli elettrodi. Nell'ipotesi della loro visibilità, possiamo prevedere come esse debban modificarsi qualora la luce sia veramente discontinua.

Con un piccolo oscillatore producente onde di 1 cm., il periodo delle intermittenze luminose, e quindi di  $\varphi(t)$ , sarebbe di  $\frac{1}{3 \times 10^{10}}$ ; le successive componenti in cui si scinde la luce normale saranno quindi a una distanza eguale a  $\frac{1}{15}$  di quella delle due righe del sodio, e le due più interne, dall'una e dall'altra parte, disteranno di  $\frac{1}{7}$  di quella distanza.

Tale notevole modificazione delle righe normali deve quindi potersi constatare facilmente anche con un ordinario reticolo di Rowland, rivelando la discontinuità della luce che lo specchio girante non perviene a risolvere, a meno che le perturbazioni spettrali che secondo diversi autori, tra cui il Wilsing (<sup>2</sup>), accompagnano la produzione delle scintille nei liquidi, non mascherino completamente il fenomeno.

Mi riservo di comunicare all'Accademia i risultati delle esperienze che intendo eseguire in proposito.

(<sup>1</sup>) Ann. d. Ch. et d. Phys. Serie 7, T. 15, pag. 156, 1898.

(<sup>2</sup>) Wilsing, *Ueber die Deutung des typischen spectrums der neuern Sterne*. Berl., Ber. 1899, pag. 426; Kayser, *Hand. d. Spectrosc.* 1 Band, pagg. 227-228.