ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

campo geometrico. Possibili sono dunque geometricamente, la geometria non euclidea, la geometria iperspaziale, la geometria non archimedea. In queste geometrie i dati dedotti dall'esperienza sono mantenuti. Ma un assioma che stabilisce ad esempio che la linèa più semplice (cioè la retta) è determinata da tre punti indipendenti anzichè da due, sarebbe ammissibile nell'Ausdehnungslehre, ma non nella geometria. Ecco ad esempio che una *geometria piana* nella quale non valga il teorema di Desargues, o non arguésienne, per me non esiste; esiste soltanto una forma astratta alla quale può corrispondere anche una forma geometrica ma non un *piano*. Ciò non toglie però che nell'analisi dell'indipendenza dei postulati sia utile tralasciarne alcuni sostituendoli astrattamente con altri e costruendo così nuove forme astratte, come ha fatto in modo ammirabile il sig. Hilbert.

Matematica. — *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*. Nota del Socio Vito Volterra.

1. In due Note precedenti [1] ho mostrato che le leggi dell'equilibrio dei corpi solidi elastici i quali occupano spazî più volte connessi (*ciclici*) si differenziano da quelle dei solidi elastici che occupano spazî semplicemente connessi (*aciclici*), ammesso in ambo i casi che le deformazioni siano regolari.

Se lo spazio occupato dal solido è ciclico sono possibili delle *distorsioni* le quali determinano uno stato di tensione nel corpo anche in mancanza di forze esterne. Tali distorsioni invece non si possono avere quando il corpo elastico occupa uno spazio aciclico.

Nel caso dunque in cui il corpo elastico occupa uno spazio ciclico si presenta tutta una serie di problemi che interessa risolvere; i problemi cioè di determinare gli stati di tensione dei corpi dovuti a date distorsioni ad essi applicate.

Onde facilitare la risoluzione di questi problemi, preparando la via a trasformarli convenientemente, esporremo molto brevemente in questa Nota alcune considerazioni d' indole generale.

2. Cominciamo dal calcolare la energia di un solido elastico soggetto a date distorsioni.

Denotiamo con t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12} le sei caratteristiche della tensione di un solido elastico deformato (lo *stress* secondo la denominazione degli Inglesi) e con γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{23}, γ_{31}, γ_{12} le sei caratteristiche della deformazione (lo *strain*).

[1] Sedute del 5 e del 19 febbraio 1905.

Chiamando φ il potenziale elastico unitario esso sarà una funzione omogenea di secondo grado delle γ_{rs} e avremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{rs}} = t_{rs} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{2} \Sigma \, t_{rs} \, \gamma_{rs} ,$$

onde la energia del sistema sarà

$$\mathrm{E} = -\frac{1}{2} \int_s \Sigma \, t_{rs} \, \gamma_{rs} \, d\mathrm{S} ,$$

denotando con S lo spazio occupato dal solido.

Supponiamo S più volte connesso (*ciclico*) e la deformazione regolare. Immaginiamo tracciate le sezioni $\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots \sigma_n$ che rendono S semplicemente connesso. Mediante semplici integrazioni per parti e denotando con u , v , w le componenti degli spostamenti dei punti del solido elastico a partire dallo stato naturale, avremo:

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{2} \int_s \Big\{ & u \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \right) + \\
& + w \left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \right) \Big\} d\mathrm{S} \\
+ \frac{1}{2} \int_\sigma \Big\{ & u (t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz) + v (t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz) + \\
& + w (t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz) \Big\} d\sigma \\
+ \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \int_{\sigma i} \Big\{ & (u_\alpha - u_\beta) (t_{11} \cos \nu_i \, x + t_{12} \cos \nu_i \, y + t_{13} \cos \nu_i \, z) + \\
& + (v_\alpha - v_\beta) (t_{21} \cos \nu_i \, x + t_{22} \cos \nu_i \, y + t_{23} \cos \nu_i \, z) \\
& + (w_\alpha - w_\beta) (t_{31} \cos \nu_i \, x + t_{32} \cos \nu_i \, y + t_{33} \cos \nu_i \, z) \Big\} \, d\sigma_i
\end{aligned}$$

in cui σ è il contorno di S , n la normale a σ diretta verso l' interno di S , mentre ν_i è la normale a σ_i e $u_\alpha , v_\alpha , w_\alpha$ i valori di u , v , w sopra σ_i dalla parte adiacente alla regione in cui entra ν_i , e $u_\beta , v_\beta , w_\beta$ i valori dell' altra parte.

Supponiamo nulle le forze di masse e le tensioni superficiali. Chiamiamo poi $l_i , m_i , n_i , p_i , q_i , r_i$ le sei caratteristiche della distorsione relativa al taglio σ_i e $\mathrm{X}_i , \mathrm{Y}_i , \mathrm{Z}_i$ le componenti della tensione unitaria che sollecita ciascun elemento della sezione σ_i. Resulterà allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \int_{\sigma i} \big\{ (l_i + r_i y - q_i z) \mathrm{X}_i + (m_i + p_i z - r_i x) \mathrm{Y}_i + (n_i + q_i x - p_i y) \mathrm{Z}_i \big\} d\sigma_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \Big\{ l_i \int_{\sigma i} \mathrm{X}_i \, d\sigma_i + m_i \int_{\sigma i} \mathrm{Y}_i \, d\sigma_i + n_i \int_{\sigma i} \mathrm{Z}_i \, d\sigma_i + p_i \int_{\sigma i} (\mathrm{Y}_i z - \mathrm{Z}_i y) \, d\sigma_i + \\
&\qquad + q_i \int_{\sigma i} (\mathrm{Z}_i x - \mathrm{X}_i z) \, d\sigma_i + r_i \int_{\sigma i} (\mathrm{X}_i y - \mathrm{Y}_i x) \, d\sigma_i \Big\} ,
\end{aligned}$$

onde posto

$$L_i = \int_{\sigma_i} X_i \, d\sigma_i \,, \qquad M_i = \int_{\sigma_i} Y_i \, d\sigma_i \,, \qquad N_i = \int_{\sigma_i} Z_i \, d\sigma_i \,,$$

$$P_i = \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) \, d\sigma_i \,, \quad Q_i = \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) \, d\sigma_i \,, \quad R_i = \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) \, d\sigma_i$$

sarà

$$E = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i (L_i l_i + M_i m_i + N_i n_i + P_i p_i + Q_i q_i + R_i r_i).$$

Per semplicità potremo indicare le $6n$ caratteristiche delle distorsioni con $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$ e i corrispondenti coefficienti loro nella precedente espressione con $E_1, E_2, \ldots E_{\sigma n}$. Avremo allora

$$E = \frac{1}{2} \sum_1^{6n} {}_i E_i s_i \,.$$

3. Diremo *distorsione elementare* una distorsione che corrisponde a tutte le $s_i = 0$ una sola eccettuata ed eguale ad 1.

Supponiamo che la sola s_h sia diversa da zero ed eguale ad 1 e chiamiamo E_{ih} i corrispondenti valori delle E_i. Si riconosce immediatamente che allorquando i valori delle caratteristiche delle distorsioni sono $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$ resulterà

$$E_i = \sum_1^{6n} {}_h E_{ih} s_h,$$

per conseguenza

$$E = \frac{1}{2} \sum_1^{6n} {}_i \sum_1^{6n} {}_h E_{ih} s_i s_h \,.$$

4. È facile stabilire il significato delle quantità E_i ed E_{ih}.

Perciò osserviamo che L_i, M_i, N_i, sono le componenti della forza resultante e P_i, Q_i, R_i le componenti della coppia resultante delle tensioni agenti sulla sezione σ_i quando si prenda per centro di riduzione l'origine degli assi.

Potremo dunque chiamare $L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i$ gli *sforzi che sollecitano la sezione* σ_i o genericamente diremo che $E_1, E_2, \ldots E_{6n}$ sono gli *sforzi relativi alla distorsione* $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$.

Quanto alla E_{ih} essa potrà denotarsi colla denominazione di *sforzo d'ordine i indotto dalla distorsione elementare d'ordine h* o anche semplicemente si potranno chiamare le E_{ih} *i coefficienti degli sforzi.*

5. Il teorema di reciprocità del Betti vale allorchè si tratta di corpi elastici i cui punti subiscono dallo stato naturale spostamenti monodromi. Infatti le integrazioni per parti necessarie per stabilire questo teorema non possono applicarsi nel caso della polidromia come lo sono in quello della

monodromia. Cerchiamo dunque a qual resultato conduce il procedimento del Betti allorchè si applica al caso di un corpo elastico che abbia subito distorsioni e non sia sollecitato da forze esterne.

Consideriamo due distorsioni $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$; $s'_1, s'_2, \ldots s'_{6n}$ applicate successivamente al corpo elastico S. Siano $\gamma_{rs}, \gamma'_{rs}$ le caratteristiche delle due diverse deformazioni che ne seguono e u, v, w ; u', v', w' le corrispondenti componenti degli spostamenti.

Con facili calcoli avremo

$$\int_s \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{rs}} \gamma'_{rs}\, ds = \int_s \Sigma \frac{\partial \varphi'}{\partial \gamma'_{rs}} \gamma_{rs}\, dS$$

in cui φ' denota la funzione φ nella quale sono state sostituite le γ'_{rs} alle γ_{rs}.

Dalla precedente eguaglianza segue:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} \{(u'_\alpha - u'_\beta)(t_{11} \cos \nu_i x + t_{12} \cos \nu_i y + t_{13} \cos \nu_i z) + \\
&\quad + (v'_\alpha - v'_\beta)(t_{21} \cos \nu_i x + t_{22} \cos \nu_i y + t_{23} \cos \nu_i z) + \\
&\quad + (w'_\alpha - w'_\beta)(t_{31} \cos \nu_i x + t_{32} \cos \nu_i y + t_{33} \cos \nu_i z)\}\, d\sigma_i = \\
&\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} \{(u_\alpha - u_\beta)(t'_{11} \cos \nu_i x + t'_{12} \cos \nu_i y + t'_{13} \cos \nu_i z) + \\
&\quad + (v_\alpha - v_\beta)(t'_{21} \cos \nu_i x + t'_{22} \cos \nu_i y + t'_{23} \cos \nu_i z) + \\
&\quad + (w_\alpha - w_\beta)(t'_{31} \cos \nu_i x + t'_{32} \cos \nu_i y + t'_{33} \cos \nu_i z)\}\, d\sigma_i
\end{aligned}$$

in cui le notazioni sono le stesse di quelle usate nella formula (1). Quindi

$$\sum_1^{6n} E'_i s_i = \sum_1^{6n} E_i s'_i . \tag{2}$$

Abbiamo dunque il teorema:

Se in un corpo elastico più volte connesso due sistemi di distorsioni generano due sistemi di sforzi, la somma dei prodotti degli sforzi del primo sistema per le caratteristiche del secondo sistema di distorsioni è eguale al prodotto degli sforzi del secondo sistema per le caratteristiche del primo sistema di distorsioni.

6. Dalla eguaglianza (2), tenendo presente che $s_1, s_2, \ldots s_{6n}$; $s'_1, s'_2, \ldots s'_{6n}$ sono quantità arbitrarie, si ricava

$$E_{ih} = E_{hi} \tag{3}$$

per tutti i valori degli indici i e h. Reciprocamente da queste eguaglianze discende come conseguenza la (2). Ne segue che il precedente teorema di reciprocità potrà enunciarsi ancora nei termini seguenti:

Lo sforzo d'ordine i indotto dalla distorsione elementare d'ordine h è eguale allo sforzo d'ordine h indotto dalla distorsione elementare d'ordine i.

In tal modo il teorema assume un aspetto simile al teorema fondamentale della induzione elettrostatica.

Una forma ancora più semplice che può darsi al teorema è questa:

I coefficienti degli sforzi non cambiano valore per una trasposizione degl' indici.

7. Date le applicazioni del teorema di reciprocità enunciato non è inutile esaminarlo ancora sotto un altro aspetto.

Prendiamo due sezioni qualunque σ_1 e σ_2 del corpo elastico. Non escludiamo il caso che esse possano anche coincidere.

Eseguiamo dapprima una distorsione consistente in una traslazione relativa T_1, nella direzione h_1, degli elementi delle due faccie del taglio σ_1, quindi calcoliamo la proiezione S_2 in una direzione h_2 della resultante delle tensioni che vengono a sollecitare la sezione σ_2.

Eseguiamo poi, invece della precedente, una distorsione consistente in una traslazione relativa T_2, nella direzione h_2, degli elementi delle due faccie del taglio σ_2, e calcoliamo la proiezione S_1 lungo h_1 della resultante degli sforzi che vengono a sollecitare la sezione σ_1.

Pel teorema di reciprocità avremo

$$S_2\,T_2 = S_1\,T_1$$

e quindi

$$\frac{S_2}{T_1} = \frac{S_1}{T_2}.$$

cioè *le proiezioni dei due sforzi nelle direzioni delle due traslazioni sono proporzionali alle grandezze delle traslazioni stesse.*

Un teorema perfettamente analogo si ha sostituendo alla traslazione T_1 una rotazione T_1 attorno alla retta h_1, purchè si sostituisca alla proiezione S_1 della resultante delle tensioni che sollecitano gli elementi di σ_1, il momento delle tensioni stesse per rapporto alla retta h_1.

Finalmente un terzo teorema pure analogo si ha facendo simili sostituzioni per T_2 e S_2.

Queste tre proposizioni equivalgono al teorema di reciprocità enunciato già in varî altri modi nel paragrafo precedente.

8. Dalla (3) si ricava che

$$E_i = \frac{\partial E}{\partial s_i}$$

onde chiamando e_{is} i coefficienti della forma reciproca della forma

$$\Sigma_i \Sigma_h \mathrm{E}_{ih} s_i s_h ,$$

avremo un altro modo di esprimere la energia del sistema mediante la formula

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_h e_{ih} \mathrm{E}_i \mathrm{E}_h .$$

9. Nella Nota precedente [1] abbiamo dimostrato che, *data una deformazione di un sistema più volte connesso, a due tagli equivalenti corrispondono eguali distorsioni.*

Vogliamo ora completare questa proposizione provando che *a due tagli equivalenti corrispondono anche eguali sforzi.*

Infatti, per definizione, la sezione σ_1 si può *ridurre* ad una sezione σ_2 equivalente mediante deformazioue continua. Mentre tale *riduzione* avviene, la superficie σ_1 genera un solido S_1 che costituisce una parte del corpo elastico S. Il solido S_1 sarà limitato da σ_1, σ_2 e da una superficie laterale ω. Noi possiamo ora immaginare S_1 in equilibrio sotto l'azione delle sole tensioni che agiscono sopra σ_1 e σ_2. Di qui resulta l'eguaglianza degli sforzi.

Gli sforzi dunque, al pari delle distorsioni, non sono elementi specifici di ciascun taglio, ma dipendono esclusivamente dalla natura geometrica dello spazio occupato dal corpo e dalla deformazione regolare di cui esso è affetto.

Il primo problema fondamentale che ci potremo proporre nello studio delle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi sarà il seguente: *Date le 6n distorsioni determinare i 6n sforzi, supponendo nulle le forze esterne.* Questa questione è equivalente a quella di *determinare i coefficienti degli sforzi.*

Noi consacreremo una Nota successiva all'esame di varî casi particolari.

Matematica. — *Ricerche sulla sestica binaria.* Memoria del Corrispondente Ernesto Pascal.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Art. I, § 1.