ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Meccanica celeste. — *Relazioni fra i momenti di inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

1. È ben noto come la espressione della funzione potenziale esterna di un pianeta sia perfettamente determinata quando sia data la massa totale M e sia pure assegnata una *superficie* S *di equilibrio*, esteriore alla massa, vogliamo dire una superficie chiusa in ogni punto della quale la normale interna segni la direzione della gravità nel punto stesso, ossia della risultante della forza attrattiva del pianeta e della così detta forza centrifuga dovuta al moto di rotazione del pianeta.

E sebbene la determinazione di quella funzione potenziale, all'esterno di S, avvenga indipendentemente da ogni particolare ipotesi intorno al modo di distribuzione della massa nell'interno del pianeta, epperò, reciprocamente, nè la conoscenza della detta superficie d'equilibrio, nè la valutazione sperimentale della gravità siano dati sufficienti per assegnare la formula

$$k = k(a\,,b\,,c)$$

che esprime la densità k nel punto interno $(a\,,b\,,c)$, è chiaro tuttavia che quei dati debbono pur servire a stabilire qualche limitazione, ossia delle equazioni di condizioni cui la funzione $k\,(a\,,b\,,c)$ deve soddisfare.

Così, nella ipotesi che di solito si ammette per la nostra Terra, cioè che un ellissoide di rotazione schiacciato rappresenti una delle superficie di equilibrio esterne, si dimostra che il modo di distribuzione interna della massa deve essere tale, che le seguenti due condizioni siano soddisfatte: 1° che il centro di tutta la massa coincida col centro di figura dell'ellissoide; 2° che l'asse di rotazione del pianeta sia asse principale d'inerzia e che gli altri due assi principali d'inerzia siano fra loro eguali.

Ora queste due conseguenze della ipotesi sferoidica vengono di solito dimostrate partendo da valutazioni approssimate della funzione potenziale esterna; esse hanno quindi l'aspetto di conclusioni *approssimate*. Vogliamo qui dimostrare come quelle proprietà siano invece esatte e necessarie conseguenze della ipotesi che la superficie di equilibrio assegnata è di rivoluzione intorno all'asse della rotazione diurna ed è simmetrica rispetto ad un piano normale all'asse (equatore). E vogliamo, più generalmente, cercare le relazioni che fra i momenti di inerzia di grado superiore al 2° si deducono dalla ora detta ipotesi.

Poichè la funzione potenziale della forza centrifuga $\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ (indicata con ω la velocità angolare) è simmetrica rispetto all'asse (z) ed è indipendente dalla coordinata z, è ben chiaro che, nella ipotesi ora detta (dell'essere la superficie S di rivoluzione attorno all'asse z e simmetrica rispetto al piano $x\,y$), anche la funzione potenziale dell'attrazione V dovrà godere delle due simmetrie intorno all'asse z e rispetto al piano $x\,y$.

Sicchè, senza più tener conto della rotazione, la nostra ricerca si riduce a quella di trovare quali relazioni debbano esistere fra i momenti di inerzia di grado qualsiasi di un corpo, affinche la funzione potenziale esterna di esso sia simmetrica intorno ad un asse, e rispetto ad un piano normale all'asse.

2. Siano a, b, c le coordinate cartesiane di un elemento $d\tau$ di volume di un corpo, k la densità nel punto (a, b, c); x, y, z le coordinate di un punto esteriore P. Sian poi r', θ', v' coordinate polari di $d\tau$, ed $\frac{1}{u}, \theta, v$ quelle di P definite dalle relazioni

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= r' \operatorname{sen}\theta' \cos v' & x &= \frac{1}{u}\operatorname{sen}\theta\cos v \\ b &= r' \operatorname{sen}\theta' \cos v' & y &= \frac{1}{u}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v \\ c &= r' \cos\theta' & z &= \frac{1}{u}\cos\theta . \end{aligned}\right.$$

Posto

$$\sigma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(v'-v),$$

la funzione potenziale del corpo sul punto P è

$$V = u\int\frac{k\,.\,d\tau}{\sqrt{1+u^2 r'^2 - 2r' u\sigma}}$$

ove l'integrale (come avverrà dei seguenti) è esteso a tutto il corpo. Se chiamiamo ϱ'_m la massima distanza dei punti del corpo dall'origine delle coordinate, allora per tutti i valori positivi di u inferiori ad $\frac{1}{\varrho'_m}$ esiste lo sviluppo

$$(2)\qquad V = \sum_{n=0}^{n=\infty} u^{n+1}\int r'^n\,.\,P_n\,.\,k\,.\,d\tau$$

dove P_n è il *polinomio di grado n di Legendre*,

$$(3)\qquad P_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{n!}\left\{\sigma^n - \frac{n(n-1)}{2\,.\,(2n-1)}\sigma^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\sigma^{n-4}\ldots\right\}.$$

Segue dalla (2) che, considerata la V come funzione delle quantità u, θ, v, i valori delle derivate parziali della V rispetto alla variabile u, hanno, per $u=0$, i valori dati dalla formola generica

$$\left(\frac{\partial^{n+1} V}{\partial u^{n+1}}\right)_{u=0} = (n+1)! \int r'^n . P_n . k . d\tau .$$

Nel caso in cui la V sia simmetrica intorno all'asse della z, sì essa che le sue derivate risulteranno indipendenti da v. Dovrà dunque aversi per ogni valore intero positivo di n

$$\int r'^n . P_n . k . d\tau \quad \textit{indipendente da } v. \tag{4}$$

Ponendo successivamente $n=1$, $n=2$, poichè $P_1 = \sigma$, $2P_2 = 3\sigma^2 - 1$, e osservando che

$$\sigma = \frac{a}{r'} \cos\theta \cos v + \frac{b}{r'} \cos\theta \operatorname{sen} v + \frac{c}{r'} \cos\theta \tag{5}$$

la (4) conduce in modo ovvio alle condizioni

$$\int a . k . d\tau = 0 \quad , \int b . k . d\tau = 0 , \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int a^2 . k . d\tau = \int b^2 . k . d\tau \\ &\int ab . k . d\tau = \int bc . k . d\tau = \int ca . k . d\tau = 0 , \end{aligned} \right. \tag{7}$$

delle quali le (6) esprimono che l'asse di rotazione contiene il centro di gravità della massa, per modo che l'origine delle coordinate può sempre farsi coincidere col centro di massa. Le (7) dimostrano quindi che l'asse z è asse principale di inerzia e che l'ellissoide d'inerzia è di rotazione intorno a z. Queste conseguenze si deducono dalla sola ipotesi che la f^e p^e V sia simmetrica intorno all'asse z. Che se ad essa ipotesi si aggiunge quella della simmetria rispetto al piano xy, per modo che la V e le sue derivate non cangino col cangiare θ in $180° + \theta$, alle condizioni (6) viene ad aggiungersi la

$$\int c . k . d\tau = 0$$

ossia: il piano di simmetria contiene il centro di massa.

Poniamo per semplicità di scrittura

$$\int a^r \, b^s \, c^t . k . d\tau = [a^r \, b^s \, c^t] . \tag{8}$$

Per $n=3$, osservando che $2P_3 = 5\sigma^3 - 3\sigma$, ove per σ si ponga la espressione (5), si trova facilmente che, perchè l'integrale

$$\int r'^3 . P_3 . k . d\tau$$

sia indipendente da v bisogna e basta che le seguenti *sei* relazioni passino fra i momenti di 3° grado

$$\begin{aligned} &[a^3] = 3[ab^2] = 3[ac^2], \\ &[b^3] = 3[ba^2] = 3[bc^2], \\ &[a^2c] = [b^2c] \qquad , \qquad [a\,b\,c] = 0 . \end{aligned}$$

La ipotesi della simmetria rispetto al piano $x\,y$ dà luogo a quest'altra condizione

$$[c^3] = 3[b^2c] .$$

3. Per valori di n superiore a 3, la sostituzione diretta della espressione (5) in (3), e quindi in (4) e la ricerca delle condizioni di indipendenza da v riescono laboriose. Conviene invece ricorrere alla espressione di P_n pei coseni e i seni degli archi multipli di v; la quale espressione è ([1]).

$$(9)\quad P_n = M_n . N_n + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\operatorname{sen}^i\theta \operatorname{sen}^i\theta'}{(n-i+1)\dots(n+i)} \cdot \frac{d^i M_n}{d\mu^i} \cdot \frac{d^i N_n}{d\nu^i} \cos(iv - iv') .$$

È qui indicato con M_n N_n ciò che diventa P_n (formula 3) quando vi si pongano le lettere μ e ν rispettivamente in luogo della σ, e si intende che dopo eseguite le operazioni indicate nella (9), si ponga

$$\mu = \cos\theta \quad , \quad \nu = \cos\theta' .$$

Sostituendo l'espressione (9) di P_n nella (4), abbiam per ogni valore di n le seguenti $2n$ equazioni

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int r'^n . \operatorname{sen}^i\theta' \frac{d^i N_n}{d\nu^i} \cos iv' . k . d\tau = 0 \\ &\int \quad \text{id.} \qquad \text{id.} \operatorname{sen} iv' . k . d\tau = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

In particolare per $i = n$, la derivata n^{ma} della N_n riducendosi ad una costante le (10) sommate, dopo aver moltiplicata la seconda per $\sqrt{-1}$ dànno

$$\int r'^n \operatorname{sen}^n\theta'(\cos v' + \sqrt{-1}\operatorname{sen} v')^n . k . d\tau ,$$

([1]) V. p. es. Tisserand, *Méc. cél.*, II, pag. 274.

ossia

$$\int (a + \sqrt{-1}\, b)^n . k . d\tau = 0 \tag{11}$$

che si spezza nelle due

$$[a^n] - \binom{n}{2}[a^{n-2} b^2] + \binom{n}{4}[a^{n-4} b^4] - \ldots = 0$$

$$\binom{n}{1}[a^{n-1} b] + \binom{n}{3}[a^{n-3} b^3] + \ldots = 0 .$$

Se la V deve essere anche simmetrica rispetto al piano xy, bisogna che il termine indipendente da v nell'espressione (4) il quale termine, per la (9), è

$$M_n \int r'^n . N_n . k . d\tau ,$$

non cangi col mutare di θ in $180° + \theta$. E poichè M_n è funzione pari o dispari di $\cos\theta$ secondo che n è pari o dispari, dovrà essere *per ogni valore dispari di n*

$$\int r'^n . N_n . k . d\tau = 0 . \tag{12}$$

Esempio: per $n = 4$, la N_4 e le sue derivate sono, a meno di fattori numerici dei quali è inutile qui tener conto,

$i = 0$	$35 \cos^4\theta' - 30 \cos^2\theta' + 3$
1	$7 \cos^3\theta' - 3 \cos\theta'$
2	$7 \cos^2\theta' \quad 1$
3	$\cos\theta'$
4	1;

epperò la prima delle condizioni (10) dà

$$\int \operatorname{sen}\theta'(7 \cos^3\theta' - 3 \cos\theta') \cos v' . r'^4 . k . d\tau = 0$$

$$\int \operatorname{sen}^2\theta'(7 \cos^2\theta' - 1)\ (\cos^2 v' - \operatorname{sen}^2 v')\, r'^4\, k . d\tau = 0$$

$$\int \operatorname{sen}^3\theta' \cos\theta'(\cos^3 v' - 3 \operatorname{sen}^2 v' \cos v')\, r'^4 . k . d\tau = 0$$

$$\int \operatorname{sen}^4\theta'(\cos^4 v' - 6 \operatorname{sen}^2 v' \cos^2 v' + \operatorname{sen}^4 v')\, r'^4 . k . d\tau = 0$$

e altre quattro analoghe si deducono dalla seconda delle (10); donde senza difficoltà, passando dalle coordinate polari alle cartesiane,

$$[ac^3] = [a^3 c] = 3[b^2 ac]$$
$$[bc^3] = [b^3 c] = 3[a^2 bc]$$
$$[ba^3] = [ab^3] = 3[abc^2]$$
$$[a^4] + [b^4] = 6[a^2 b^2]$$
$$[a^4] - [b^4] = 6[a^2 c^2] - 6[b^2 c^2].$$

Nessuna condizione nuova, per $n=4$, è introdotta dalla ipotesi della simmetria rispetto al piano xy.

4. La ipotesi della simmetria della f^a p^e V intorno all'asse z conduce pertanto a $2n$ equazioni di condizione fra i momenti di inerzia di grado n.

Interessa di paragonare queste condizioni, con quelle, naturalmente assai più restrittive, che si deducono dalla ipotesi che la *massa sia effettivamente distribuita simmetricamente intorno all'asse z, ossia che la densità k sia indipendente da v'*.

In questa ipotesi, posto

$$a = \varrho \cos v' \qquad b = \varrho \operatorname{sen} v'$$

nell' integrale (8), l'espressione

$$\int \varrho^{r+s} \cos^r v' . \operatorname{sen}^s v' \, c^t . k . d\tau \qquad . \qquad (r+s+t=n)$$

(ove k non dipende da v') resterà invariata col dare a v' un incremento arbitrario. Per questo bisogna, e basta, che

$$s \int \varrho^{r+s} \cos^{r+1}\theta \operatorname{sen}^{s-1}\theta . c^t . k . d\tau = r \int \varrho^{r+s} \cos^{r-1}\theta . \operatorname{sen}^{s+1} . \theta . c^t . k . d\tau$$

ossia che

$$s\left[a^{r+1} b^{s-1} c^t\right] = r\left[a^{r-1} b^{s+1} c^t\right]. \tag{13}$$

Per $s=0$ si trova

$$\left[a^{u-1} b c^t\right] = 0 \qquad (u+t=n)$$

e così generalmente si trovano nulli tutti quei momenti di inerzia nei quali uno o entrambi gli esponenti di a, b sono dispari; il che è un'ovvia conseguenza della ipotesi sulla distribuzione della massa.

Posto in generale $r+s=u$, per dati valori di u e di t, le condizioni (13) sono in numero di $u+1$ se u è dispari ed esprimono che tutti i momenti si annullano. Se u è pari le (13) sono in numero di u; di esse, $\frac{u}{2}$ esprimono l'annullarsi di quei momenti ove a e b hanno esponenti dispari, le altre $\frac{u}{2}$ stabiliscono relazioni fra i rimanenti momenti di inerzia. Così per $u=4$, $t=1$ le condizioni sono

$$\left[a^3 bc\right] = \left[ab^3 c\right] = 0$$
$$\left[b^4 c\right] = 3\left[b^2 a^2 c\right] = \left[a^4 c\right];$$

per $u=2$, $t=3$

$$[abc^3]=0 \quad , \quad [a^2c^3]=[b^2c^3].$$

Tutti gli altri momenti di 5° grado si annullano.

Per un dato valore di n, dando ad u i valori da 0 ad n si hanno in tutto

$$(14)\quad \begin{cases} 2n+2(n-2)+\cdots+2.2=\dfrac{n(n+2)}{2} & \text{condizioni se } n \text{ è pari} \\ (n+1)+2(n-1)+2(n-3)+\cdots+2.2=\dfrac{(n+1)^2}{2} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{dispari} \end{cases}$$

Il numero dei differenti momenti di inerzia di grado n è $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

La condizione della simmetria della massa attorno ad un'asse lascia quindi arbitrarii

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+2)=\frac{n+2}{2} \quad \text{momenti di grado } n \text{ se } n \text{ è pari}$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(n+1)^2=\frac{n+1}{2} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{dispari.}$$

Laddove la condizione di simmetria della f^e p^e esterna V lascia arbitrarii i valori di

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-2n=\frac{1}{2}(n^2-n+2) \quad \text{momenti di grado } n.$$

La ipotesi della simmetria della densità rispetto al piano xy esige che siano nulli tutti i momenti di inerzia nei quali c ha esponente dispari, il che non aggiunge alle condizioni enumerate in (14) nessuna nuova condizione se n è pari; ne aggiunge invece $\dfrac{n+1}{2}$ se n è dispari. In questo caso tutti i momenti d'inerzia di grado n debbono essere nulli.

5. Ammesso, come è ragionevole, che la generale distribuzione delle masse nell'interno della terra sia simmetrica intorno all'asse di rotazione, e che questa regolare distribuzione sia, soltanto in punti isolati o in regioni più o meno estese, alterata da difetti o eccessi di masssa, le formole precedenti possono servire di base per lo studio almeno approssimato (vogliam dire collo sviluppo della funzione potenziale limitato fino a un dato termine) delle configurazioni che questi difetti o eccessi possono assumere senza alterare sensibilmente la simmetria della superficie di equilibrio esterna. Il campo della ricerca è oltremodo esteso. A titolo di esempio possiamo dimostrare che: *quelle irregolarità non possono essere distribuite in un piano perpendicolare all'asse di rotazione.* Per questo occorre e basta dimostrare che un disco piano nel quale la densità non sia simmetrica in-

torno al centro non può dar luogo ad una funzione potenziale simmetrica intorno all'asse del disco.

Infatti, quando la massa attirante sia tutta distribuita nel piano xy, dovremo nelle formole (10) porre $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Ed osservando che la espressione

$$\frac{d^i N_n}{d\nu^i}, \qquad (\nu = \cos\theta')$$

per $\nu = 0$, si riduce a zero o ad una costante differente da zero, a seconda che $n - i$ è dispari o pari, la 1ª della (10) darà

$$\int r'^n . \cos i v' . k . d\tau = 0 \tag{15}$$

per tutti i valori interi e positivi di n e per tutti i valori interi, positivi e pari di $n - i$. La (15) può anche scriversi

$$\int r'^{m+2s} . \cos m v' . k . d\tau = 0 \tag{16}$$

per tutti i valori interi e positivi di m e di s. Ora la densità k può esprimersi colla serie di Fourier

$$k = a_0 + \sum_1^\infty a_m \cos m v' + \sum_1^\infty b_m \operatorname{sen} m v'$$

dove $a_o\, a_m\, b_m$ sono funzioni finite di r'. Sostituendo questa espressione nella (16) e ponendo $d\tau = r' . dv'\, dr'$; si ottiene, colla integrazione, rispetto a v', fra i limiti 0 e 2π:

$$\int_0^R r'^{m+1+2s} . a_m\, dr' = 0 \tag{17}$$

dove R è il massimo valore di r'. Questa, dovendo essere verificata per ogni valore intero e positivo di s, esige che sia $a_m = 0$ (¹). Similmente si dimostra che $b_m = 0$; per modo che la k risulta funzione soltanto di r', ossia la distribuzione della massa deve essere simmetrica rispetto al centro, come si voleva dimostrare.

(¹) È facile dimostrare che, affinchè si abbia

$$\int_a^b x^{m+2s} f(x) dx$$

(dove i limiti a e b non siano di segno diverso) per tutti i valori interi e positivi di s, è necessario che la $f(x)$ sia identicamente nulla nell'intervallo (a, b) eccettuati tutt'al più quei punti dell'intervallo stesso nei quali la funzione f presentasse delle discontinuità.