ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Fisiologia. — *Sull'esaurimento e restauro dei centri nervosi delle rane.* Nota del Socio straniero U. KRONECKER.

Matematica. — *Sui gruppi di movimenti.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Matematica. — *Nuove applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali.* Nota del prof. GUIDO FUBINI, presentata dal Socio U. DINI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Un contributo all'analisi delle funzioni.* Nota di G. VITALI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Il sig. Lebesgue osserva [1] che le funzioni classificate dal sig. Baire [2], e che noi chiameremo brevemente *funzioni di Baire*, sono funzioni misurabili B.

Io qui voglio dimostrare la proposizione reciproca, dopo di che si potrà dire che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia una funzione di Baire è che sia misurabile B.

1. Cominciamo col richiamare la nozione di gruppo misurabile B.

Consideriamo le operazioni:

I. « Fare la somma di un infinità numerabile o di un numero finito « di gruppi ».

II. « Prendere la parte comune a tutti i gruppi di una famiglia con« tenente un numero finito o un infinità numerabile di gruppi ».

Chiamiamo inoltre *gruppi fondamentali* B i gruppi formati da tutti i punti che riempiono un segmento, gli estremi compresi o no.

(1) *Leçons sur l'intégration* etc. par Henri Lebesgue, pagg. 111-112, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

(2) Tesi di R. Baire, Annali di Matematica, 1899; *Leçons sur les fonctions discontinues* par René Baire, Paris, Gauthier-Villars, 1905; *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, par Emile Borel, pagg. 149-158, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

« I gruppi misurabili B sono tutti quelli che si ottengono applicando « le operazioni I e II sui gruppi fondamentali B e su quelli che così via « via si ottengono ».

Consegue che:

« Applicando le operazioni I e II su gruppi misurabili B si hanno « gruppi misurabili B » [1].

Ora facciamo la seguente importante osservazione:

Una proposizione relativa ad un gruppo sarà dimostrata per tutti i gruppi misurabili B *se sarà vera per ogni gruppo fondamentale* B *e se si prova che, nell'ipotesi che sia vera per una famiglia di gruppi, è vera per ogni gruppo che si ottiene applicando a gruppi di quella famiglia le operazioni I e II.*

2. Sia f una funzione e siano p e q due numeri reali e $p < q$.

Indicheremo con $\}f\{_p^q$ la funzione uguale ad f nei punti in cui $p \leq f \leq q$, ed uguale a p nei punti in cui $f < p$, ed uguale a q nei punti in cui $f > q$.

Noi vogliamo dimostrare che « *se f è una funzione di Baire anche « la $\}f\{_p^q$ è una funzione di Baire* ».

Il teorema è manifestamente vero se f è di classe 0, perchè se f è continua lo è pure la $\}f\{_p^q$. Per dimostrarlo in generale basterà che noi proviamo che se è vero per ogni funzione f di classe minore di ν (ν essendo il tipo ordinale di un gruppo bene ordinato finito o numerabile) è vero pure per ogni funzione di classe ν.

Supponiamo adunque che il teorema sia vero per ogni funzione di classe minore di ν e sia f una funzione di classe ν.

La f è limite di una successione di funzioni ciascuna di classe minore di ν:

$$f_1, f_2, \ldots f_n \ldots$$

Le funzioni

$$\}f_1\{_p^q, \}f_2\{_p^q, \ldots \}f_n\{_p^q \ldots$$

sono dunque tutte funzioni di Baire.

Inoltre esse convergono manifestamente verso $\}f\{_p^q$, dunque $\}f\{_p^q$ è una funzione di Baire.

Osservazione. Il metodo di dimostrazione ci porterebbe anche a provare che se f è di classe ν, la $\}f\{_p^q$ è di classe ν o minore. Ma ciò ora a noi non interessa.

3. Ora mi propongo di dimostrare che:

Se (a, b) è un intervallo, se G *è un gruppo di punti di (a, b) misurabile* B *e se m ed n sono due numeri reali, la funzione f che è uguale*

[1] Enuncio questa proposizione specialmente per chiarire il senso della definizione precedente.

ad m nei punti di G *ed uguale ad n nei rimanenti punti di* (a, b) *è una funzione di Baire.*

La dimostrazione è suggerita dall'osservazione che chiude il § 1. Se G è un gruppo fondamentale B, la f ha al massimo due punti di discontinuità e quindi è certo una funzione di Baire. Supponiamo ora che il teorema sia vero per una famiglia F di gruppi. Io dico che è vero per ogni gruppo che si ottiene applicando le operazioni I e II sui gruppi di F.

Siano G_1 e G_2 due gruppi di F. Sia f_1 la funzione uguale ad m in G_1 e zero nei rimanenti punti, ed f_2 la funzione uguale ad m in G_2 e zero nei rimanenti punti. La funzione $f_1 + f_2$ è $2m$ nei punti comuni a G_1 e G_2 è m nei punti appartenenti ad uno solo di questi gruppi ed è nulla nei rimanenti. La funzione φ uguale ad $\{f_1 + f_2\}_0^m$ se $m > 0$ od a $\{f_1 + f_2\}_m^0$ se $m < 0$ è uguale ad m nei punti di $G_1 + G_2$ e nulla nei rimanenti. Inoltre, essendo le f_1, f_2 funzioni di Baire, anche φ è una funzione di Baire. Così pure $m - \varphi$ è una funzione di Baire ed anche la funzione $\psi = \frac{n}{m}(m - \varphi)$.

La ψ è nulla nei punti di $G_1 + G_2$ ed uguale ad n nei rimanenti, e quindi la funzione f uguale ad m nei punti di $G_1 + G_2$ e ad n nei rimanenti, è la somma di φ e ψ e perciò è una funzione di Baire. Di qui segue subito che se

$$G_1, G_2, \ldots G_r$$

sono r gruppi di F, la funzione uguale ad m nei punti di

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_r$$

e ad n nei rimanenti è una funzione di Baire. Ancora: se

$$G_1, G_2, \ldots G_r \ldots$$

è un gruppo numerabile di gruppi di F, le funzioni f_r uguali ad m nei punti di $G_1 + G_2 + \cdots + G_r$ e ad n nei rimanenti sono funzioni di Baire formanti una successione che tende alla funzione f che è m nei punti di

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_r + \cdots$$

ed n nei rimanenti. Questa f è dunque una funzione di Baire. Si può così dire che applicando ad F l'operazione I si ottengono gruppi pei quali vale il teorema.

L'operazione II applicata a F si riduce alla I applicata ai complementari dei gruppi di F, pei quali vale il teorema. Dunque il teorema vale anche pei gruppi che si ottengono da F applicando l'operazione II.

Il teorema è così dimostrato.

4. *Se un intervallo* (a, b) *è diviso in una famiglia di gruppi misurabili* B (*costituita da un numero finito o numerabile di gruppi*) *e se a*

ciascun gruppo G_i *di quella famiglia si fa corrispondere un numero* m_i, *la funzione che assume in ogni punto il valore del numero corrispondente al gruppo cui appartiene il punto, è una funzione di Baire.*

Difatti essa è la somma delle funzioni f_i che sono uguali ad m_i nei punti di G_i e nulle nei rimanenti, e le f_i sono funzioni di Baire.

5. *Una funzione misurabile* B *è una funzione di Baire.* — Sia $f(x)$ una funzione misurabile B, σ un numero positivo qualsiasi, n un numero intero positivo o negativo, Γ_n il gruppo dei punti in cui

$$n\sigma \leq f < (n+1)\,\sigma.$$

Γ_n è un gruppo misurabile B.

La funzione φ_σ che è uguale ad $n\sigma$ in ogni punto di Γ_n, qualunque sia n, è una funzione di Baire, ed in ogni punto è

$$0 \leq f - \varphi_\sigma < \sigma.$$

Sia ora

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_r \ldots$$

una successione di numeri positivi e tendenti a zero. Sarà

$$\lim_{r=\infty} \varphi_{\sigma_r} = f$$

in ogni punto, e quindi f è una funzione di Baire.

Fisica. — *Sugli effetti di correnti continue interrotte ed alternate e di onde hertziane sul ritardo di magnetizzazione nei corpi magnetici in campi Ferraris* [1]. Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

In una Nota testè presentata a questa R. Accademia [2] ho riferito i risultati di una serie di ricerche intese a studiare il fenomeno della variazione di isteresi in un cilindro di acciaio in campi Ferraris di diversa inten-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (Istituzione Carlo Erba) in collaborazione con l'egregio signor Assistente ing. Giuseppe Comboni.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, seduta del 5 marzo 1905. Vedi anche i miei precedenti lavori rispettivamente pubblicati nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° semestre 1904, pag. 272; negli Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta alla Sezione di Milano nella seduta del 25 maggio 1904); e nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, Serie II, vol. XXXVIII, pag. 142.