ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 aprile 1905.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. In questa Nota studieremo un caso particolare di distorsioni partendo dai principî che abbiamo stabiliti in una Nota precedente (1). Vedremo come questi principî permettano di approfondire il meccanismo delle distorsioni e rivelino dei fatti che sono ben lontani da quelli che *a priori* si sarebbero potuti prevedere esaminando intuitivamente la questione. Il resultato si otterrà d'altra parte senza ricorrere a procedimenti d'integrazione delle equazioni differenziali, ma colla semplice ed elementare discussione della espressione dell'energia di un sistema elastico che ha subìto date distorsioni.

Per dare brevemente un'idea dei resultati ritorniamo al primitivo esempio da cui siamo partiti nella prima Nota (2).

Abbiamo supposto di togliere ad un anello una sottile fetta trasversale la cui grossezza varii proporzionalmente alla distanza dall'asse di simmetria; quindi a forza riavvicinare fra loro le due faccie del taglio e saldarle. Il corpo abbandonato a sè cessa di essere allo stato naturale: assume uno stato di

(1) Seduta del 2 aprile 1905.

(2) Vedi Nota presentata nella seduta del 5 febbraio 1905, art. I, § 1.

deformazione regolare e i suoi elementi vengono sollecitati da forze elastiche. Ci si può quindi chiedere quali azioni si esercitino sulle faccie saldate. Sembrerebbe evidente che esse dovessero essere tese: ma così non è. Vi è sempre una parte tesa ed una parte compressa; anzi *la somma delle forze di tensione è eguale alla somma delle forze di compressione.*

A questo teorema e ad altri analoghi, che gettano una luce inattesa sulla distribuzione degli sforzi elastici generati dalle distorsioni nei corpi, viene consacrata questa Nota.

2. Cominciamo dal dare alcune definizioni.

Nella Nota precedente abbiamo espressa la energia elastica di un corpo soggetto a distorsioni mediante la formula

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6n} {}_i \, \mathrm{E}_i \, s_i \, .$$

in cui E_i denotano gli sforzi ed s_i le caratteristiche delle distorsioni. Chiameremo E_i lo *sforzo coniugato* alla caratteristica s_i della distorsione.

Scelto il centro di riduzione, la distorsione applicata ad ogni taglio può decomporsi in una traslazione ed in una rotazione relative degli elementi delle faccie del taglio. Servendosi dello stesso centro di riduzione le azioni che sollecitano gli elementi delle faccie del medesimo taglio (composte come se fossero applicate ai punti di un sistema rigido) danno luogo ad una forza resultante e ad una coppia resultante. Questa forza e questa coppia resultanti costituiscono lo *sforzo totale* applicato alla sezione (cfr. Nota precedente § 4).

In virtù della precedente definizione, le componenti, secondo gli assi coordinati, della forza resultante sono *coniugate* delle corrispondenti proiezioni della traslazione; e le componenti della coppia resultante sono *coniugate* delle corrispondenti proiezioni della rotazione.

Se la distorsione è elementare, una sola delle caratteristiche e quindi una sola delle precedenti proiezioni, sarà diversa da zero: la *componente della forza* o la *componente della coppia* coniugata a questa caratteristica si potrà senz'altro chiamare lo *sforzo coniugato* alla distorsione elementare.

3. Un solido di rivoluzione si potrà immaginare generato dalla rotazione di un'area piana (*area generatrice*) attorno ad una retta del suo piano. Sia n l'ordine di connessione dell'area generatrice. Se l'asse di rotazione è esterno ad essa, l'ordine di connessione del solido sarà $n+1$; ma se l'asse costituisce una parte del contorno dell'area generatrice, l'ordine di connessione del solido resulterà eguale ad n.

Mediante $n-1$ tagli lineari riduciamo semplicemente connessa l'area generatrice. Colla rotazione questi tagli generano altrettante superficie che possono considerarsi come sezioni del solido. Nel secondo caso bastano queste sezioni per render semplicemente connesso il solido, mentre nel primo caso per ottenere la connessione semplice converrà fare ancora un taglio trasversale, per esempio un taglio che coincida con una delle posizioni che l'area generatrice assume nella rotazione.

Quest'ultimo taglio, o un altro qualsiasi equivalente, si dirà di *prima specie*; ognuno degli altri, o uno qualsiasi equivalente, si dirà di *seconda specie*.

Supponiamo di avere un solido simmetrico due volte connesso. Allora due casi potranno presentarsi: 1) l'area generatrice è semplicemente connessa ed è esterna all'asse di simmetria; 2) l'area generatrice è due volte connessa ed è in parte limitata dall'asse di simmetria.

Per ridurre semplicemente connesso il solido faremo nel primo caso un taglio di prima specie e nel secondo caso un taglio di seconda specie, e diremo nel primo caso che il corpo è *due volte connesso di prima specie* e nel secondo caso che è *due volte connesso di seconda specie*.

4. Studiamo ora le distorsioni di un corpo elastico simmetrico due volte connesso di prima specie, ammettendo che la simmetria non sia limitata alla forma soltanto, ma, nella ipotesi della anisotropia, la simmetria sussista anche relativamente alla costituzione del corpo elastico.

La distorsione si supporrà eseguita sopra un taglio σ fatto lungo una delle posizioni che l'area generatrice assume nella rotazione.

Porremo l'origine in un punto dell'asse di simmetria e prenderemo come asse z quest'asse.

La energia del sistema verrà espressa dalla formula (Vedi Nota precedente, § 3).

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_h \mathrm{E}_{ih}\, s_i\, s_h . \tag{1}$$

in cui

$$s_1 = l \ , \ s_2 = m \ , \ s_3 = n \ , \ s_4 = p \ , \ s_5 = q \ , \ s_6 = r$$

denoteranno le caratteristiche della distorsione secondo le notazioni usate nella Nota precedente.

Ciò premesso osserviamo che, a cagione della simmetria, la energia del sistema non cambierà se applichiamo la identica distorsione, anzichè alla sezione primitiva σ, ad un'altra sezione che formi con questa un angolo θ qualsiasi.

Ora la sezione primitiva e la nuova sezione sono equivalenti, quindi avremo che la energia del sistema sarà la stessa, tanto se applichiamo al sistema lungo la sezione σ la distorsione

$$s_1\,,\ s_2\,,\ s_3\,,\ s_4\,,\ s_5\,,\ s_6\,,$$

quanto se applichiamo, lungo la stessa sezione, la distorsione

$$s'_1 = s_1 \cos\theta + s_2 \operatorname{sen}\theta \ , \ s'_2 = - s_1 \operatorname{sen}\theta + s_2 \cos\theta \ , \ s'_3 = s_3$$
$$s'_4 = s_4 \cos\theta + s_5 \operatorname{sen}\theta \ , \ s'_5 = - s_4 \operatorname{sen}\theta + s_5 \cos\theta \ , \ s'_6 = s_6$$

In altri termini:

$$\text{(2)} \qquad E = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_h E_{ih}\, s'_i\, s'_h$$

dovrà essere indipendente da θ, ossia

$$\frac{dE}{d} = 0.$$

Ma

$$\frac{ds'_1}{d\theta} = s'_2 \quad \frac{ds'_2}{d\theta} = - s'_1 \quad \frac{ds'_3}{d\theta} = 0$$
$$\frac{ds'_4}{d\theta} = s'_5 \quad \frac{ds'_5}{d\theta} = - s'_4 \quad \frac{ds'_6}{d\theta} = 0$$

quindi

$$0 = \frac{dE}{d\theta} = (E_{11} - E_{22})\, s'_1 s'_2 + E_{12}\,(s'^2_2 - s'^2_1) + E_{13}\, s'_2 s'_3 - E_{23}\, s'_1 s'_3 +$$
$$+ (E_{44} - E_{55})\, s'_4 s'_5 + E_{45}\,(s'^2_5 - s'^2_4) + E_{46}\, s'_5 s'_6 - E_{56}\, s'_4 s'_6 +$$
$$+ (E_{14} - E_{25}) \quad (s'_2 s'_4 + s'_1 s'_5) + (E_{24} + E_{15}) \quad (s'_2 s'_5 - s'_4 s'_1) +$$
$$+ E_{16}\, s'_2 s'_6 - E_{26}\, s'_1 s'_6 + E_{34}\, s'_3 s'_5 - E_{35}\, s'_3 s'_4 .$$

Le s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5, s'_6 sono arbitrarie; ne segue che

$$E_{11} = E_{22} \ , \ E_{44} = E_{55} \ , \ E_{14} = E_{25} \ , \ E_{24} = - E_{15}$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = E_{45} = E_{46} = E_{56} = E_{16} = E_{26} = E_{34} = E_{35} = 0$$

e per conseguenza l'espressione (2) di E si ridurrà a:

$$\text{(3)} \qquad E = \frac{1}{2} \Big\{ E_{11}\,(s_1^2 + s_2^2) + E_{33}\, s_3^2 + E_{44}\,(s_4^2 + s_5^2) + E_{66}\, s_6^2 +$$
$$+ 2E_{14}\,(s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2E_{24}\,(s_2 s_4 - s_1 s_5) + 2E_{36}\, s_3 s_6 \Big\}.$$

Prendiamo come piano della sezione σ il piano $x\,z$ ed esaminiamo la distorsione elementare d'ordine 6, cioè quella dovuta ad una sola rotazione relativa degli elementi delle due faccie del taglio σ attorno all'asse z.

È evidente che la deformazione del corpo dovrà resultare simmetrica rispetto al piano $x z$, e perciò l'ellissoide d'elasticità e la superficie direttrice [1] in ogni punto di σ dovranno avere $x z$ per piano di simmetria.

In altri termini le azioni elastiche che si esercitano sugli elementi di σ dovranno essere normali a σ. Componendo queste azioni e prendendo per centro di riduzione l'origine non si potrà ottenere che una resultante normale a σ (ossia avente la direzione y) ed una coppia resultante il cui asse è parallelo a σ. Ne segue che

$$E_{16} = E_{36} = E_{56} = 0$$

onde sarà

$$E = \frac{1}{2}\Big\{E_{11}(s_1^2 + s_2^2) + E_{33}s_3^2 + E_{44}(s_4^2 + s_5^2) + E_{66}s_6^2 + \\ + 2E_{14}(s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2E_{24}(s_2 s_4 - s_1 s_5)\Big\}.$$

Nello stesso modo, consideriamo la distorsione elementare d'ordine 2, ossia quella dovuta ad una sola traslazione relativa degli elementi delle due faccie del taglio σ parallelamente all'asse y. L'ellissoide d'elasticità e la superficie direttrice, in ogni punto di σ, resulteranno simmetriche rispetto al piano $x z$. Da ciò discendono, come conseguenza di un ragionamento analogo a quello che abbiamo ora fatto, le condizioni

$$E_{12} = E_{32} = E_{52} = 0,$$

Ma

$$E_{14} = E_{52}\,,$$

quindi

$$E = \frac{1}{2}\Big\{E_{11}(s_1^2 + s_2^2) + E_{33}s_3^2 + E_{44}(s_4^2 + s_5^2) + E_{66}s_6^2 + \\ + 2E_{24}(s_2 s_4 - s_1 s_5)\Big\}. \tag{4}$$

Ora osserviamo che il coefficiente $E_{11} = E_{22}$ non può esser nullo, altrimenti la energia dovuta ad una distorsione elementare d'ordine 1, oppure d'ordine 2, resulterebbe nulla, il che è assurdo. Ne segue che, componendo tutte le azioni che sollecitano σ in virtù della distorsione elementare d'ordine 2, deve ottenersi una resultante diversa da zero la cui linea d'azione incontra l'asse z in un punto Ω. Infatti tutte queste azioni equivalgono alla forza E_{22} applicata all'origine ed alla coppia di momento E_{24} avente per asse l'asse x.

[1] Vedi Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides.* Paris, 1883, chap. I, § 6

Ma se prendiamo il centro di riduzione nel punto Ω si avrà $E_{24} = 0$, quindi otteremo finalmente:

$$(5) \qquad E = \frac{1}{2} \left\{ E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2 \right\}.$$

5. Passiamo alle distorsioni dei corpi simmetrici due volte connessi di seconda specie. Supporremo che le distorsioni siano applicate ad un taglio di seconda specie simmetrico rispetto all'asse di simmetria del corpo.

La energia del sistema avrà sempre la forma (1) e, se prendiamo come asse z l'asse di simmetria, per una rotazione di un angolo θ degli assi x, y nel loro piano non deve alterarsi l'espressione dell'energia stessa. Anche in questo caso dunque la (2) deve resultare indipendente da θ e quindi E dovrà assumere la espressione (3). Ma, in virtù della simmetria, E non deve mutare cambiando s_6 in $-s_6$, allorchè si suppongono $s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$; quindi $E_{36} = 0$. Anche per uno scambio degli assi x, y fra loro E non cambierà, ossia E deve conservarsi la stessa scambiando contemporaneamente s_1 con s_2 e s_4 con $-s_5$. Ne viene che $E_{14} = 0$ e per conseguenza E dovrà avere la forma (4).

Ora un ragionamento analogo a quelle fatto nel § precedente, prova che, scegliendo convenientemente l'origine in un punto Ω, può rendersi $E_{24} = 0$, quindi anche nel caso in cui la duplice connessione è di 2ª specie l'espressione dell'energia può ridursi alla formula (5).

Il punto Ω si dirà il *punto centrale dell'asse di simmetria.*

6. La formula (5), allorchè si tien conto del principio dei tagli equiequivalenti, racchiude il teorema seguente:

In un corpo elastico simmetrico due volte connesso, ogni distorsione elementare induce il solo sforzo coniugato, allorchè si prende il centro di riduzione nel punto centrale dell'asse di simmetria.

Da questo teorema segue il corollario:

Lo sforzo totale indotto da una distorsione consistente in una traslazione relativa degli elementi delle faccie del taglio, è una forza la cui linea d'azione passa per il punto centrale dell'asse di simmetria.

Lo sforzo totale indotto da una distorsione, consistente in una rotazione relativa degli elementi delle faccie del taglio intorno ad un asse passante pel punto centrale dell'asse di simmetria, è una coppia.

Sarebbe poi facile dimostrare:

Se il corpo elastico ha un piano di simmetria normale all'asse di simmetria, il punto centrale è il luogo di intersezione dell'asse di simmetria col piano di simmetria.

7. Esaminiamo il caso in cui la duplice connessione sia di prima specie e la distorsione di ordine 6. Allora lo sforzo si riduce ad una coppia avente per asse l'asse di simmetria, quindi se consideriamo le azioni elastiche che sollecitano una faccia del taglio la loro resultante sarà nulla e di qui *resulta il teorema enunciato nel* § 1. Sarebbe facile completare questo teorema mostrando che *rispetto all'asse di simmetria il momento delle forze di tensione supera quello delle forze di compressione* e precisamente della quantità E_{66}.

In modo analogo supponiamo che il taglio sia condotto lungo il piano $x\,z$ e consideriamo la distorsione d'ordine 2. Lo sforzo indotto consisterà in una forza normale al taglio e la cui linea d'azione incontrerà l'asse di simmetria. Quindi anche in questo caso dovranno esistere elementi delle faccie del taglio soggetti a compressione, altri a tensione.

Ritornando all'esempio del § 1 potremo enunciare la proposizione: *se all'anello togliamo* (anzichè una fetta di grossezza proporzionale alla distanza dell'asse di simmetria) *una fetta di grossezza uniforme e poscia saldiamo le faccie della fenditura, parte di esse saranno tese e parte compresse. Le tensioni supereranno le pressioni* (e precisamente di E_{11}), *ma il momento delle prime sarà eguale al momento delle seconde rispetto all'asse di simmetria.*

Dai resultati precedenti si deduce con grande facilità che, se all'anello togliamo una fetta la cui grossezza è data da

$$s_2 - s_6 x$$

essendo x la distanza dell'asse di simmetria, saldando poi le faccie della fenditura si ingenererà uno sforzo normale alla sezione e la cui linea d'azione disterà dall'asse di simmetria di

$$h = \frac{s_6}{s_2}\,\frac{E_{66}}{E_{11}}.$$

Così si vede che scegliendo convenientemente il rapporto $\frac{s_6}{s_2}$ si potrà far passare questa linea d'azione per un punto qualsiasi della sezione.

Nella prima delle Note citate [1] abbiamo esaminato la distorsione che consiste nel far scorrere le due faccie del taglio l'una relativamente all'altra nel senso dell'asse di simmetria in modo da dare all'anello una forma leggermente elicoidale e quindi saldare fra loro le due faccie. Questa distorsione corrisponde ad una distorsione di ordine 3. Lo sforzo corrispondente ha perciò per linea d'azione l'asse di simmetria. Ne segue, che degli elementi

[1] Seduta del 5 febbraio 1905 (art. III, 2° esempio).

di una faccia del taglio, parte saranno stirati nel verso in cui si è fatto lo scorrimento, parte nel verso opposto, ed il momento delle prime azioni sarà eguale a quello delle altre per rapporto ad un asse normale alla sezione e che incontra l'asse di simmetria.

Non staremo a discutere altri casi particolari che pur non sono privi di interesse, ma che danno luogo a considerazioni ed a conclusioni analoghe a quelle che abbiamo ora svolte e formulate.

Matematica. — *Nuove applicazioni dei metodi di Riemann e Picard alla teoria di alcune equazioni alle derivate parziali.* Nota del prof. Guido Fubini, presentata dal Socio U. Dini.

Il metodo di Riemann, completato dal metodo delle approssimazioni successive, fu esteso ad ampie classi di equazioni alle derivate parziali dai signori Bianchi [1], Niccoletti [2], Delassus [3], Holmgren [4]; in un altro senso fu generalizzato da Leroux [5]; e per tipi affatto distinti di equazioni detto metodo fu esteso dal prof. Volterra [6] e dai signori Tedone, Coulon e D'Adhémar, che ne semplificarono e generalizzarono i risultati. Esistono però certamente molte altre classi di equazioni alle derivate parziali, o di sistemi di tali equazioni, alla cui teoria si può con successo applicare il metodo di Riemann, convenientemente generalizzato. In questa Nota riassumo alcune prime ricerche [7] su una classe di equazioni lineari alle derivate parziali, in cui l'insieme dei termini contenenti le derivate di ordine massimo si può anche considerare come prodotto simbolico di più trasformazioni infinitesime reali $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Siano $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ numeri interi positivi non nulli: le equazioni in discorso rientrano nel tipo:

$$\sum_{r_1=0}^{\tau_1}\sum_{r_2=0}^{\tau_2}\cdots\sum_{r_m=0}^{\tau_m} b_{r_1 r_2 \ldots r_m} X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_m^{r_m}(u) = 0 \tag{1}$$

dove le b sono funzioni delle n variabili indipendenti, reali, finite e continue

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1895.

(2) Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli Ser. 2ª, vol. 8° (1897). Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1895.

(3) Annales de l'École Normale Supérieure (1895) (Supplément).

(4) Arkiv för Mathem., astronomi, och Fysik, Bd 1, Stockholm 1904.

(5) Annales de l'École Normale Supérieure, 1895; Journal de Mathém. 1898, 1900.

(6) Sur les vibrations, ecc. Acta Mathematica, tomo 18.

(7) Esse saranno pubblicate per disteso negli Atti dell'Accademia Gioenia, Catania 1905.