# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XIV.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

detto per l'integrale $\int L_3\, d\sigma_3$ si può ripetere per gli integrali $\int L_1\, d\sigma_1$, $\int L\, d\sigma_2$. Otterremo in conclusione che la (4) diventa

$$0 = Z_{123}(A) + H$$

dove H è una certa espressione, completamente nota in virtù delle condizioni iniziali, imposte alla $u$ su $\Sigma$. In conclusione quindi il metodo di Riemann ci determina il valore che $Z_{123}$ ha in un punto generico A di R, o, in altre parole, riduce l'integrazione dell'equazione $F(u) = 0$ all'integrazione dell'equazione

$$Z_{123}(A) = H$$

che è un'equazione di ordine inferiore. Per le equazioni I$^e$, p. es., il metodo di Riemann riduce l'integrazione a sole quadrature; per un'equazione, in cui sia $m = 5$, $\tau_i = 1$ $(i \leq 5)$, il metodo di Riemann riduce l'integrazione all'integrazione di un'equazione, che con un cambiamento proiettivo di variabili si può trasformare in un'equazione differenziale in due variabili indipendenti del secondo ordine di tipo iperbolico. In tutti questi casi dunque il metodo di Riemann, oltre a trasformare l'equazione in un'equazione più semplice, dimostra contemporaneamente i teoremi di unicità: nel caso generale questi teoremi risulteranno dimostrati con una successiva applicazione del metodo di Riemann.

**Fisica matematica.** — *Sulla teoria del solenoide elettrodinamico*. Nota del prof. GIUSEPPE PICCIATI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Secondo il concetto di Ampère un solenoide è costituito da un sistema di correnti chiuse, tutte di uguale intensità, piane, geometricamente uguali, equidistanti e disposte normalmente ad una linea, retta o curva, luogo dei loro centri di figura, e che dicesi asse del solenoide. In pratica ci si contenta di realizzare un sistema che si comporta come un solenoide avvolgendo ad elica sopra un cilindro un filo metallico isolato. Se il passo è abbastanza piccolo si considera ogni spira costituita di un circuito piano circolare e di un tratto rettilineo di collegamento, in modo che si può dire che l'elica percorsa da corrente equivale ad un solenoide e ad una corrente rettilinea parallela all'asse del cilindro. Riconducendo il filo parallelamente all'asse, da un estremo all'altro dell'elica, si neutralizza l'effetto di questa corrente rettilinea: è ciò che si fa nei solenoidi con i quali si vogliono mettere in evidenza le analogie fra i campi generati da correnti e quelli prodotti da magneti. In generale però l'effetto del tratto di corrente rettilinea parallela all'asse è così piccolo che si può trascurare, e riguardare quindi una elica come un semplice solenoide. Nei trattati di Fisica si studia il campo prodotto da un solenoide cilindrico rettilineo così costituito, limitatamente però al caso in cui la distanza fra due spire consecutive sia infinitesima rispetto al raggio del cilindro, ricorrendo alle proprietà del campo prodotto da una corrente circolare, ed al principio della equivalenza fra una corrente in circuito chiuso ed una lamina magnetica avente lo stesso perimetro.

Valendosi invece delle proprietà del campo prodotto da una corrente costante elicoidale indefinita (¹) si può effettuare in generale lo studio del campo prodotto da un solenoide o rocchetto, teoricamente indefinito, praticamente assai lungo rispetto al raggio.

Oltre il ritrovare, quando il passo sia infinitesimo rispetto al raggio, le proprietà dei rocchetti delle quali, come è noto, spesso ci si vale per ottenere campi magnetici sensibilmente uniformi, altre se ne ricavano, quando invece il passo non sia troppo piccolo, per i punti dell'asse o vicinissimi a lui.

Si ha cioè per questi: la forza elettrica e magnetica sono fra loro ortogonali; quella elettrica è diretta secondo la normale all'elica, quella magnetica ha inclinazione costante sull'asse. Nell'intervallo di ogni passo la forza magnetica, e quindi anche la sua componente normale all'asse, compiendo una rotazione di 360°, essa può imprimere un moto rotatorio ad un ago magnetico piccolissimo il cui baricentro scorra sull'asse del cilindro (vedi il § 2).

§ 1°. Si consideri un conduttore filiforme indefinito disposto ad elica di parametro $m > 0$, immerso in un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile ed in quiete.

Riferendoci a coordinate elicoidali, legate alle cartesiane dalle relazioni

$$x = \varrho_1 \cos \varrho_3 \;,\; y = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 \;,\; z = \varrho_2 + m\varrho_3 = m(\theta + \varrho_3)\,, \tag{1}$$

corrisponda l'elica data ai valori $\varrho_1' = \mathrm{R}\,, \varrho_2' = 0$, e sia percorsa da una corrente diretta in modo da formare un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse $z$. Se I indica la misura della corrente in unità elettromagnetiche, le componenti della forza elettrica X, Y, Z, e della magnetica L, M, N secondo $xyz$ sono date (²) dalle seguenti formole:

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2 + m^2}\left\{\frac{d\omega}{d\varrho_1}\cos\varrho_3 + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\omega}{d\theta}\operatorname{sen}\varrho_3\right\}, \\ \mathrm{Y} &= -\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2 + m^2}\left\{\frac{d\omega}{d\varrho_1}\operatorname{sen}\varrho_3 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\omega}{d\theta}\cos\varrho_3\right\}, \\ \mathrm{Z} &= -\mathrm{I}\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + m^2}}{m}\frac{d\omega}{d\theta}\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(¹) Vedi la mia Nota, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905.
(²) Vedi Nota citata.

$$(3)\quad \begin{cases} L = I\left\{\left(\dfrac{m}{\varrho_1}\dfrac{d\omega}{d\theta}+\dfrac{R}{m}\dfrac{d\omega_3}{d\theta}\right)\cos\varrho_3-\left(m\dfrac{d\omega}{d\varrho_1}-\dfrac{R}{m}\dfrac{d\omega_1}{d\theta}\right)\operatorname{sen}\varrho_3\right\}, \\ M = I\left\{\left(\dfrac{m}{\varrho_1}\dfrac{d\omega}{d\theta}+\dfrac{R}{m}\dfrac{d\omega_3}{d\theta}\right)\operatorname{sen}\varrho_3+\left(m\dfrac{d\omega}{d\varrho_1}-\dfrac{R}{m}\dfrac{d\omega_1}{d\theta}\right)\cos\varrho_3\right\}, \\ N = -IR\left\{\dfrac{d\omega_3}{d\varrho_1}+\dfrac{\omega_3}{\varrho_1}+\dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{d\omega_1}{d\theta}\right\}. \end{cases}$$

In esse le $\omega, \omega_1, \omega_3$, quando ci riferiamo a punti interni al cilindro su cui è tracciata l'elica, sono:

$$(4)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{m}\sum_1^\infty i\,H_1^n\left(\dfrac{inR}{m}\right)J^n\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)\cos n\theta, \\ \omega_1 = \dfrac{\pi}{m}\sum_1^\infty i\left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)J^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)-\right. \\ \qquad\left.-H_1^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)J^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)\right]\cos n\theta, \qquad (\varrho_1 < R) \\ \omega_3 = \dfrac{\varrho_1}{Rm}+\dfrac{\pi}{m}\sum_1^\infty i\left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)J^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)+\right. \\ \qquad\left.+H_1^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)J^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)\right]\cos n\theta, \end{cases}$$

mentre per i punti esterni si ha

$$(5)\quad \begin{cases} \omega = -\dfrac{2}{m}\log\varrho_1+\dfrac{2\pi}{m}\sum_1^\infty i\,H_1^n\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)J^n\left(\dfrac{inR}{m}\right)\cos n\theta \\ \omega_1 = \dfrac{\pi i}{m}\sum_1^\infty i\left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)-\right. \\ \qquad\left.-H_1^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)\right]\operatorname{sen} n\theta \qquad (\varrho_1 > R) \\ \omega_3 = \dfrac{R}{m\varrho_1}+\dfrac{\pi}{m}\sum_1^\infty i\left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)+\right. \\ \qquad\left.+H_1^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)J^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right)\right]\cos n\theta \end{cases}$$

indicando le J le funzioni cilindriche di 1ª specie e le $H_1$ funzioni cilindriche di 3ª specie o di Hankel.

2. Esaminiamo dapprima il campo per i punti interni al cilindro; dovremo nelle (2) (3) sostituire per $\omega, \omega_1, \omega_3$ le espressioni (4); se allora

facciamo uso delle relazioni fra le funzioni cilindriche in generale,

$$2\,\frac{d\mathrm{C}^{\nu}(x)}{dx}=\mathrm{C}^{\nu-1}(x)+\mathrm{C}^{\nu+1}(x)\,,$$

$$\frac{d\mathrm{C}^{\nu}(x)}{dx}=-\frac{\nu}{x}\,\mathrm{C}^{\nu}(x)+\mathrm{C}^{\nu-1}(x)=\frac{\nu}{x}\,\mathrm{C}^{\nu}(x)-\mathrm{C}^{\nu+1}(x)\,,$$

possiamo dare alle componenti delle forze elettromagnetiche la forma seguente:

$$(6)\quad\begin{cases}\mathrm{X}=\dfrac{2\pi\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m}\Big\{\dfrac{\mathrm{R}\cos\varrho_3}{4m^2}\displaystyle\sum_1^\infty in(\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}}+\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}})(\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1}-\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1})\cos n\theta\\ \qquad\qquad+\dfrac{\operatorname{sen}\varrho_3}{\varrho_1}\displaystyle\sum_1^\infty in\,\mathrm{H}^{n}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n}_{\rho_1}\operatorname{sen} n\theta\Big\}\,,\\ \mathrm{Y}=\dfrac{2\pi\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m}\Big\{\dfrac{\mathrm{R}\operatorname{sen}\varrho_3}{4m^2}\displaystyle\sum_1^\infty in(\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}}+\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}})(\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1}-\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1})\cos n\theta\\ \qquad\qquad-\dfrac{\cos\varrho_3}{\varrho_1}\displaystyle\sum_1^\infty in\,\mathrm{H}^{n}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n}_{\rho_1}\operatorname{sen} n\theta\Big\}\,,\\ \mathrm{Z}=\dfrac{2\pi\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m^2}\displaystyle\sum_1^\infty in\,\mathrm{H}^{n}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n}_{\rho_1}\operatorname{sen} n\theta\,,\end{cases}$$

$$(7)\quad\begin{cases}\mathrm{L}=-\dfrac{\pi\mathrm{I}}{m}\Big\{\cos\varrho_3\displaystyle\sum_1^\infty in\left[\dfrac{2m}{\varrho_1}\mathrm{H}^{n}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n}_{\rho_1}+\dfrac{\mathrm{R}}{m}(\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1}+\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1})\right]\operatorname{sen} n\theta\\ \qquad\qquad-\dfrac{\mathrm{R}\operatorname{sen}\varrho_3}{2m}\displaystyle\sum_1^\infty in(\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}}-\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}})(\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1}+\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1})\cos n\theta\Big\}\,,\\ \mathrm{M}=-\dfrac{\pi\mathrm{I}}{m}\Big\{\operatorname{sen}\varrho_3\displaystyle\sum_1^\infty in\left[\dfrac{2m}{\varrho_1}\mathrm{H}^{n}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n}_{\rho_1}+\dfrac{\mathrm{R}}{m}(\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1}+\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}}\,\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1})\right]\operatorname{sen} n\theta\\ \qquad\qquad+\dfrac{\mathrm{R}\cos\varrho_3}{2m}\displaystyle\sum_1^\infty in(\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}}-\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}})(\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1}+\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1})\cos n\theta\Big\}\,,\\ \mathrm{N}=-\dfrac{2\mathrm{I}}{m}+\dfrac{\pi\mathrm{I}\mathrm{R}\varrho_1}{2m^3}\displaystyle\sum_1^\infty in(\mathrm{H}^{n+1}_{1\mathrm{R}}-\mathrm{H}^{n-1}_{1\mathrm{R}})(\mathrm{J}^{n+1}_{\rho_1}+\mathrm{J}^{n-1}_{\rho_1})\cos n\theta\,,\end{cases}$$

avendo, per brevità, posto

$$\mathrm{H}^{\nu}_{1}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)=\mathrm{H}^{\nu}_{1\mathrm{R}}\quad,\quad\mathrm{J}^{\nu}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)=\mathrm{J}^{\nu}_{\rho_1}\quad\text{per }\nu=n-1\,,\,n\,,\,n+1\,.$$

Esaminiamo ora il comportamento del campo per i punti dell'asse del cilindro od a lui vicinissimi. Per le (1) si possono individuare i punti dell'asse come quelli per i quali $\varrho_1=0\,,\,\theta=0$, ossia $x=0\,,\,y=0\,,\,z=m\varrho_3$: ricordando che

$$\mathrm{J}^0(0)=1\;,\;\mathrm{J}^n(0)=0\;,\;\lim_{\rho_1=0}\left[\frac{\mathrm{J}^1\left(\dfrac{i\varrho_1}{m}\right)}{\varrho_1}\right]=\frac{i}{2m}\,,$$

ed inoltre che

$$\mathrm{H}_1^2\left(\frac{i\mathrm{R}}{m}\right)=\frac{2m}{i\mathrm{R}}\,\mathrm{H}_1^1\left(\frac{i\mathrm{R}}{m}\right)-\mathrm{H}_1^0\left(\frac{i\mathrm{R}}{m}\right),$$

le (6) (7) divengono:

$$(8)\quad\begin{cases} \mathrm{X}=\dfrac{\pi\mathrm{IR}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{2m^3}\,i\,(\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^0+\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^2)\cos\varrho_3=\dfrac{\pi\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m^2}\,\mathrm{H}_1^1\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)\cos\varrho_3\,,\\[2ex] \mathrm{Y}=\dfrac{\pi\mathrm{IR}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{2m^3}\,i\,(\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^0+\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^2)\,\mathrm{sen}\,\varrho_3=\dfrac{\pi\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m^2}\,\mathrm{H}_1^1\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{sen}\,\varrho_3\,,\\[2ex] \mathrm{Z}=0\,, \end{cases}$$

$$(9)\quad\begin{cases} \mathrm{L}=\dfrac{\pi\mathrm{IR}}{2m^2}\,i\,(\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^2-\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^0)\,\mathrm{sen}\,\varrho_3=-\dfrac{\pi\mathrm{I}}{m}\left\{\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\,\mathrm{H}_1^0\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)-\mathrm{H}_1^1\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)\right\}\mathrm{sen}\,\varrho_3\,,\\[2ex] \mathrm{M}=-\dfrac{\pi\mathrm{IR}}{2m^2}\,i\,(\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^2-\mathrm{H}_{1\mathrm{R}}^0)\cos\varrho_3=\dfrac{\pi\mathrm{I}}{m}\left\{\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\,\mathrm{H}_1^0\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)-\mathrm{H}_1^1\left(\dfrac{i\mathrm{R}}{m}\right)\right\}\cos\varrho_3\,,\\[2ex] \mathrm{N}=-\dfrac{2\mathrm{I}}{m}\,. \end{cases}$$

Per i punti dell'asse le due forze elettrica e magnetica sono quindi fra loro ortogonali; quella elettrica è in ogni punto diretta secondo la normale all'elica, quella magnetica ha inclinazione costante sull'asse del cilindro. Perciò nell'intervallo di un passo, cioè fra $z=m\,\varrho_3$ e $z=m\,(\varrho_3+2\pi)$, la forza magnetica, e quindi anche la sua componente normale all'asse, compie una rotazione di 360°. Se si considera ora un ago magnetico, di lunghezza piccolissima rispetto al diametro del cilindro, e se, supposto questo verticale, si sospende in modo da poter ruotare in un piano orizzontale attorno al baricentro, situato sull'asse del cilindro, l'ago, supposto non soggetto all'azione terrestre, dovrà in punti distanti fra loro di $\left(s+\frac{1}{4}\right)2\pi m$, essendo $2\pi m$ il passo e per $s$ intero, assumere due direzioni formanti un angolo di 90°. Se si considera poi l'ago mobile in modo che il suo baricentro descriva l'asse del cilindro di moto uniforme (con velocità non troppo grande) risulta facilmente dalla relativa equazione del movimento che l'ago dovrà assumere un moto di rotazione attorno all'asse del cilindro.

Invece per un ago soggetto all'azione magnetica terrestre l'angolo formato dalle due direzioni sopradette, è, salvo il caso di correnti di intensità grandissima, assai minore di 90°. Ciò si riconosce subito tenendo conto dell'ordine di grandezza della componente normale all'asse del cilindro della forza magnetica, che la corrente esercita, di fronte alla forza magnetica terrestre. Se si considera, per esempio, $\mathrm{R}=\mathrm{cm}\;20$, $m=\mathrm{cm}\;20$ si ottiene dalle (9) per $\sqrt{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2}$ il valore $0{,}1027.\mathrm{I}$; quindi, anche per correnti relativamente intense, questa forza non è molto grande rispetto alla componente orizzontale H del magnetismo terrestre ([1]). Valori minori si hanno per questa forza quando si prenda più piccolo il passo. Distruggendo però l'azione terrestre sull'ago si dovranno ottenere gli stessi fenomeni. Per questo basta collocare l'asse del cilindro nel meridiano magnetico, in modo che la forza magnetica terrestre sia diretta secondo l'asse stesso, e disporre l'ago in modo che possa ruotare solo in un piano normale all'asse del cilindro.

3. Consideriamo ora l'elica a spire molto serrate, cioè tale che il passo $2\pi m$ sia infinitesimo rispetto a $2\pi \mathrm{R}$, in modo da essere trascurabile $\dfrac{m}{\mathrm{R}}$, essendo però nel tempo stesso una quantità finita $\dfrac{\mathrm{I}}{m} = 2\pi \mathrm{I}\,\dfrac{\mathrm{I}}{2\pi m} = 2\pi \mathrm{I}\mu$, indicando $\mu$ il numero delle spire per unità di lunghezza. Per determinare allora i valori delle forze elettromagnetiche è necessario valersi delle espressioni assintotiche delle funzioni cilindriche per argomenti grandissimi.

Riferiamoci sempre al caso di $\varrho_1 < \mathrm{R}$: nelle (6) (7) compariscono termini del tipo $n\,\mathrm{H}_1^{\nu}\left(\dfrac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{\nu'}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right)$, potendo $\nu, \nu'$ prendere uno qualunque dei valori $n = 1, n, n+1$.

Per valori grandissimi dell'argomento i valori assintotici di $\mathrm{H}(ix)$, $\mathrm{J}^{\nu}(ix)$ sono ([2]):

$$
(10)\quad \begin{cases}
\mathrm{J}^{\nu}(ix) \backsim \dfrac{\mathrm{P}_s(xi) + i\mathrm{Q}_s(xi)}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-x-\frac{\nu+1}{2}\pi i} + \dfrac{\mathrm{P}_s(xi) - i\mathrm{Q}_s(xi)}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{x+\frac{\nu\pi i}{2}}, \\[2ex]
\mathrm{H}_1^{\nu}(ix) \backsim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x i}}\,\left[\mathrm{P}_s(xi) + i\mathrm{Q}_s(xi)\right] e^{-x-\frac{2\nu+1}{4}\pi i},
\end{cases}
$$

essendo $\mathrm{P}_s(xi)$ e $\mathrm{Q}_s(xi)$ polinomi della forma:

$$
\mathrm{P}_s(xi) = 1 + \sum_{r=1}^{r \leqq \frac{s}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{5^2}{4}\right)\cdots\left[\nu^2 - \frac{(4r-1)^2}{4}\right]}{(2xi)^{2r}},
$$

$$
\mathrm{Q}_s(xi) = \sum_{r=0}^{r \leqq \frac{s-1}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left[\nu^2 - \frac{(4r+1)^2}{4}\right]}{(2xi)^{2r+1}}.
$$

([1]) A Roma nel 1902 era $\mathrm{H} = 0{,}2344$.

([2]) Vedi Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, pag. 156.

Si ottiene quindi per $n\mathrm{H}_1^{\nu}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{\nu'}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)$ il seguente valore assintotico:

$$
\begin{aligned}
n\mathrm{H}_1^{\nu}\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^{\nu'}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \backsim \frac{m}{\pi\sqrt{\mathrm{R}\varrho_1}}\left[\mathrm{P}_s\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)+i\mathrm{Q}_s\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\right] \\
\left\{\left[\mathrm{P}_s\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)+i\mathrm{Q}_s\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\right]e^{\frac{-n(\mathrm{R}+\varrho_1)}{m}-\frac{(\nu+\nu'+2)}{2}\pi i}\right. \\
\left.+\left[\mathrm{P}_s\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)-i\mathrm{Q}_s\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\right]e^{\frac{-n(\mathrm{R}-\varrho_1)}{m}-\frac{(\nu+1-\nu')}{2}\pi i}\right\}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Ora purchè non sia il punto considerato vicinissimo al cilindro, ciò che è da escludersi, giacchè non sarebbe più legittimo riguardare il filo come una linea (cioè non si potrebbe prescindere, come si è fatto, dallo spessore del filo stesso) la (11) mostra come si possa trascurare $n\mathrm{H}_1^{\nu}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\mathrm{J}^{\nu'}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)$ come infinitesimo d'ordine superiore ad una qualunque potenza di $\frac{m}{\mathrm{R}}$. Le (6), (7) danno quindi per i punti interni al solenoide:

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{X}=0\,,\ \mathrm{Y}=0\,,\ \mathrm{Z}=0\,,\\
&\mathrm{L}=0\,,\ \mathrm{M}=0\,,\ \mathrm{N}=-\frac{2\mathrm{I}}{m}=-4\pi\mathrm{I}\mu\,,
\end{aligned}\right.
$$

resultato perfettamente concordante con quello già noto [1].

4. Esaminiamo ora il campo nei punti esterni al cilindro, cioè per $\varrho_1>\mathrm{R}$: le (2) (3) danno, mediante le (5), per le forze elettromagnetiche, le espressioni:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{X}&=\frac{2\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m}\,\frac{\cos\varrho_3}{\varrho_1}+\mathrm{X}',\\
\mathrm{Y}&=\frac{2\mathrm{I}\sqrt{\mathrm{R}^2+m^2}}{m}\,\frac{\operatorname{sen}\varrho_3}{\varrho_1}+\mathrm{Y}',\\
\mathrm{Z}&=\mathrm{Z}',
\end{aligned}\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{L}&=\frac{2\mathrm{I}}{m}\,\frac{m\operatorname{sen}\varrho_3}{\varrho_1}+\mathrm{L}',\\
\mathrm{M}&=-\frac{2\mathrm{I}}{m}\,\frac{m\cos\varrho_3}{\varrho_1}+\mathrm{M}',\\
\mathrm{N}&=\frac{2\mathrm{I}}{m}+\mathrm{N}',
\end{aligned}\right.
$$

[1] Vedi il *Cours d'Electricité* par H. Pellat, pag. 66.

nelle quali $X'$, $Y'$, $Z'$, $L'$, $M'$, $N'$ indicano le espressioni stesse (6) (7), dopo che in esse si è sostituito alle $H^{\nu}_{1R}$ le $J^{\nu}_{R} = J^{\nu}\left(\frac{inR}{m}\right)$, ed alle $J^{\nu}_{1\rho_1}$ le $H^{\nu}_{1\rho_1} = H^{\nu}_{1}\left(\frac{in\rho_1}{m}\right)$ per $\nu = n-1, n, n+1$.

Consideriamo poi il caso in cui è $\frac{m}{R}$ trascurabile, mentre $\frac{I}{m} = 2\pi I\mu$ è una quantità finita; la (11), scambiato in essa R con $\rho_1$ e viceversa, ci mostra che si può trascurare $nH^{\nu}_{1}\left(\frac{in\rho_1}{m}\right) J^{\nu}\left(\frac{inR}{m}\right)$ quando si escluda, per la ragione detta prima, la considerazione dei punti vicinissimi al cilindro. Onde, con l'ordine di approssimazione considerato, le (13) (14) danno

$$
(15)\quad \begin{cases} X = 4\pi I\mu R \dfrac{\cos\rho_3}{\rho_1}, & Y = 4\pi I\mu R \dfrac{\operatorname{sen}\rho_3}{\rho_1}, \quad Z = 0 \\ L = 0 & M = 0 \qquad\qquad N = 0 \end{cases}
$$

cioè, come è noto, il campo magnetico del rocchetto all'esterno è nullo. Le (15) esprimono inoltre il modo di variare della forza elettrica per i punti esterni al rocchetto.

5. Quando si voglia mettersi nelle condizioni di quei solenoidi nei quali il filo è ricondotto parallelamente all'asse del cilindro da un estremo all'altro della elica, basta aggiungere il campo dovuto ad una corrente rettilinea, indefinita, della stessa intensità, parallela all'asse, alla distanza R e diretta nel senso negativo dell'asse $z$. Supposta nel piano $xz$, il campo da essa prodotto è

$$
(16)\quad \begin{cases} X_1 = -\dfrac{2I(x-R)}{(x-R)^2+y^2}, & Y_1 = -\dfrac{2Iy}{(x-R)^2+y^2}, \quad Z_1 = 0 \\ L_1 = -\dfrac{2Iy}{(x-R)^2+y^2}, & M_1 = \dfrac{2I(x-R)}{(x-R)^2+y^2}, \quad N_1 = 0 \end{cases}
$$

quindi l'aggiunta delle (16) alle corrispondenti componenti già determinate per i punti interni od esterni al cilindro dà le forze del campo dovuto al solenoide così costituito. Quando si riguardi $\frac{m}{R}$ trascurabile, mentre $\frac{I}{m} = 2\pi i\mu$ è una quantità finita, l'azione dovuta alle (16) è trascurabile, restando giustificato il riguardare praticamente un'elica a spire molto serrate come un semplice solenoide.