ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1905.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

Le formole più importanti relative all'addizione delle funzioni ϑ di una variabile:

$$\vartheta_{\gamma,g}(z) \equiv \vartheta\begin{bmatrix}\gamma\\ g\end{bmatrix}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i\omega\left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2+2\pi i\left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(z+\frac{g}{2}\right)}$$

per valori interi delle caratteristiche, cioè le formole analoghe alle formole fondamentali di Jacobi, le formole di addizione propriamente dette, le relazioni *a tre termini*, ecc., si possono riassumere in poche formole generali, dalle quali si deducono poi tutte immediatamente con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche.

Mi è sembrato importante di ricercare fino a qual punto queste formole generali, pur mantenendone *la forma* possibilmente inalterata, possano sussistere anche per valori non interi delle caratteristiche. In ciò che segue mi propongo appunto di dimostrare come tali formole sussistano inalterate salvo alcune lievi restrizioni, anche per valori reali od imaginari quali si vogliano delle caratteristiche.

Così, ad esempio, le formole analoghe alla formola fondamentale di Jacobi sono tutte contenute (cfr. § III) nell'unico tipo:

$$(-1)^{\varepsilon s+\varepsilon+\eta}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+\varepsilon,\, g_\rho+\eta}(z_\rho) \mp (-1)^{\varepsilon' s+\varepsilon'+\eta'}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+\varepsilon',\, g_\rho+\eta'}(z_\rho) =$$

$$\pm(-1)^{\varepsilon'' s+\varepsilon''+\eta''}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+\varepsilon'',\, g_\rho+\eta''}(z_\rho') - (-1)^{\varepsilon''' s+\varepsilon'''+\eta'''}\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta_{\gamma_\rho+\varepsilon''',\, g_\rho+\eta'''}(z_\rho')$$

essendo le ε, η dei numeri interi opportunamente scelti, le γ_ρ, g_ρ ($\varrho = 1,2,3,4$) dei numeri interi qualisivogliano e gli argomenti z_ρ, z_ρ'($\varrho = 1,2,3,4$) legati dalle relazioni:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} 2z_1' &= z_1 - z_2 - z_3 - z_4 \\ 2z_2' &= -z_1 + z_2 - z_3 - z_4 \\ 2z_3' &= -z_1 - z_2 + z_3 - z_4 \\ 2z_4' &= -z_1 - z_2 - z_3 + z_4 \end{aligned}$$

Ora questo stesso tipo generale di formola sussiste, come vedremo, *assolutamente inalterato*, anche per valori reali od imaginarii qualisivogliano delle caratteristiche γ_ρ, g_ρ ($\varrho = 1, 2, 3, 4$), salvo la sola restrizione che siano numeri interi le semisomme:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \quad , \quad s = \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4).$$

Soltanto quando si volesse che questa formola generale sussistesse per valori del tutto arbitrarii delle γ_ρ, g_ρ ($\varrho = 1, 2, 3, 4$), sarebbe necessario introdurre nella forma da noi data alcune opportune modificazioni.

Nel § IV dedurremo facilmente dalla formola ora menzionata la formola generale di addizione propriamente detta, cioè un'espressione di

$$\vartheta_{\gamma_1, g_1}(u + v), \vartheta_{\gamma_2, g_2}(u - v)$$

che sussiste per valori del tutto arbitrarii delle $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$.

Finalmente nel § V tratteremo, sempre applicando gli stessi principii, la questione analoga per le formole cosidette *a tre termini*.

Circa le modificazioni cui si è sopra accennato, mi riservo aggiungere qualche parola in altra occasione. Del resto esse risultano abbastanza facilmente dagli stessi procedimenti dimostrativi dei quali ci siamo qui serviti.

I.

1. Partiamo dalla relazione [1]:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
2\prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho, g_\rho}(z_\rho) &= \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho, g'_\rho}(z'_\rho) + \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho-1, g'_\rho}(z'_\rho) + \\
&+ e^{\frac{\pi i}{2}\Sigma\gamma'} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho, g'_\rho-1}(z'_\rho) - e^{\frac{\pi i}{2}\Sigma\gamma'} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho-1, g'_\rho-1}(z'_\rho)
\end{aligned}
$$

in cui le $z_\rho, \gamma_\rho, g_\rho$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ sono affatto arbitrarie e le $z'_\rho, \gamma'_\rho, g'_\rho$ sono ad esse legate dalle relazioni (α) e dalle relazioni analoghe:

$$
(\alpha)'\qquad
\begin{aligned}
2\gamma'_1 &= \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 \\
2\gamma'_2 &= -\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 \\
2\gamma'_3 &= -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 \\
2\gamma'_4 &= -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
2g'_1 &= g_1 - g_2 - g_3 - g_4 \\
2g'_2 &= -g_1 + g_2 - g_3 - g_4 \\
2g'_3 &= -g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \\
2g'_4 &= -g_1 - g_2 - g_3 + g_4
\end{aligned}
$$

Posto per brevità:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{\gamma_1, g_1}(z_1) \,.\, \vartheta_{\gamma_2, g_2}(z_2) \,.\, \vartheta_{\gamma_3, g_3}(z_3) \,.\, \vartheta_{\gamma_4, g_4}(z_4) &= [\gamma, g] \\
\vartheta_{\gamma_1, g_1}(z'_1) \,.\, \vartheta_{\gamma_2, g_2}(z'_2) \,.\, \vartheta_{\gamma_3, g_3}(z'_3) \,.\, \vartheta_{\gamma_4, g_4}(z'_4) &= [\gamma, g]'
\end{aligned}
$$

noi la scriveremo anche per maggior comodità come segue:

$$
(1)'\qquad
\begin{aligned}
2[\gamma, g] &= [\gamma, g]' + [\gamma - 1, g]' + \\
&+ e^{\frac{\pi i}{2}\Sigma\gamma'}[\gamma', g' - 1]' - e^{\frac{\pi i}{2}\Sigma\gamma'}[\gamma' - 1, g' - 1]'.
\end{aligned}
$$

2. Se poniamo inoltre

$$
(\beta)\qquad
\begin{aligned}
\sigma &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) = -\tfrac{1}{2}(\gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4) \\
s &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = -\tfrac{1}{2}(g'_1 + g'_2 + g'_3 + g'_4)
\end{aligned}
$$

i due ultimi gruppi nelle formole (α) si possono scrivere:

$$
\gamma'_\rho = \gamma_\rho - \sigma \ , \quad g'_\rho = g_\rho - s \ , \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4)
$$

[1] Cfr.: *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione* (Rend. dei Lincei, 2° sem. 1902, pag. 261). Le piccole differenze fra la formola ivi data e quella qui riportata sono dovute specialmente all'aver surrogato la sostituzione ortogonale di Jacobi colla sostituzione definita dalle (α) che mi è sembrata meglio appropriata al nostro scopo a cagione della sua perfetta simmetria.

e per conseguenza la (1)'

$$2[\gamma, g] = [\gamma - \sigma, g - s]' + [\gamma - \sigma - 1, g - s]' +$$
$$+ e^{-\pi i\sigma}[\gamma - \sigma, g - s - 1]' - e^{-\pi i\sigma}[\gamma - \sigma - 1, g - s - 1]'$$

o, più brevemente:

$$\text{(I)} \qquad 2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1} e^{-\pi i(\sigma+\varepsilon)\eta}[\gamma - \sigma - \varepsilon, g - s - \eta]'.$$

II.

1. Noi supporremo d'ora innanzi che le γ_ρ e g_ρ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ vengano scelte in guisa che i numeri σ ed s, definiti dalle (β), riescano *interi*.

Posto allora:

$$\text{(1)} \qquad -(\sigma + \varepsilon) \equiv \varepsilon' \quad , \quad -(s + \eta) \equiv \eta' \qquad (\text{mod. } 2)$$

dove le ε' ed η' possono ricevere soltanto i valori 0 ed 1, la formola (I) si potrà scrivere [1]

$$2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(\sigma+\varepsilon)\eta}[\gamma + \varepsilon', g + \eta']'$$

od anche per le (1):

$$2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}[\gamma + \varepsilon', g + \eta']'.$$

È però agevole di riconoscere, se si rifletta che le ε', η' percorrono, fatta astrazione dall'ordine, precisamente quegli stessi quattro sistemi di valori che sono percorsi dalle ε, η, che si potrà anche scrivere:

$$\text{(2)} \qquad 2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{\varepsilon(\eta+s)}[\gamma + \varepsilon, g + \eta]'.$$

2. Se ora con ε' ed η' intendiamo due interi qualisivogliano e se in

[1] Si tengano presenti le formole:

$$\vartheta_{\gamma\pm2,g}(u) = \vartheta_{\gamma,g}(u) \quad , \quad \vartheta_{\gamma,g\pm2}(u) = e^{\pm\pi i\gamma}\vartheta_{\gamma,g}(u)$$

valide per qualsiasi valore di γ e di g.

quest' ultima formola si accrescano tutte le γ di ε' e tutte le g di η', si ottiene:

$$2[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1}(-1)^{(\varepsilon'+\varepsilon'')(\eta'+\eta''+s)}[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']'$$

dove le ε'', η'' hanno i valori 0 od 1 secondo le congruenze:

$$\varepsilon+\varepsilon' \equiv \varepsilon'' \quad , \quad \eta+\eta' \equiv \eta'' \qquad (\text{mod. } 2)$$

Pertanto si potrà anche scrivere, per una ragione analoga a quella cui si è accennato dianzi:

$$\text{(II)} \qquad 2[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1}(-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)}[\gamma+\varepsilon, g+\eta]'.$$

3. Se (ε, η) ed (ε', η') sono due coppie qualunque di numeri interi, purchè fra loro distinte (mod. 2), si ha, come è facile riconoscere:

$$(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta') \equiv \varepsilon+\varepsilon'+\eta+\eta'+1 \qquad (\text{mod. } 2)$$

Si vede pertanto che alla (II) si può anche dare dare la forma:

$$2[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = 2[\gamma+\varepsilon', g+\eta']' -$$
$$-(-1)^{(s+1)\varepsilon'+\eta'}\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1}(-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta}[\gamma+\varepsilon, g+\eta]'$$

d'onde, scambiando, come è lecito, le z colle z':

$$\text{(II)}' \qquad \begin{aligned} &2.(-1)^{(s+1)\varepsilon'+\eta'}\left\{[\gamma+\varepsilon', g+\eta]' - [\gamma+\varepsilon', g+\eta']\right\} = \\ &= \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1}\sum_{\eta=0}^{\eta=1}(-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta}[\gamma+\varepsilon, g+\eta]. \end{aligned}$$

Questa nuova forma della (II) è notevole, inquantochè ci dice che: *il valore dell'espressione*

$$(-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta}\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_\rho+\varepsilon\\ g_\rho+\eta\end{bmatrix}(z_\rho) - \prod_{\rho=1}^{\rho=4}\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_\rho+\varepsilon\\ g_\rho+\eta\end{bmatrix}(z'_\rho)\right\}$$

è del tutto indipendente dalla scelta dei numeri interi ε ed η.

III.

1. Supposto che

$$(0,0) \quad , \quad (\varepsilon', \eta') \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

siano quattro coppie di numeri interi fra loro distinte (mod. 2), la (2) del precedente § si può svolgere come segue:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon', g+\eta']' + \\ + (-1)^{\varepsilon''(\eta''+s)}\,[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']' + (-1)^{\varepsilon'''(\eta'''+s)}\,[\gamma+\varepsilon''', g+\eta''']' \end{aligned}$$

e così la (II):

$$\begin{aligned} 2[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}\,[\gamma, g]' + [\gamma+\varepsilon', g+\eta']' + \\ + (-1)^{(\varepsilon''+\varepsilon')(\eta''+\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']' + \\ + (-1)^{(\varepsilon'''+\varepsilon')(\eta'''+\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon''', g+\eta''']' \end{aligned}$$

il che, moltiplicando i due membri per $(-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}$ ed osservando che

$$\eta''\varepsilon' + \eta'\varepsilon'' \equiv 1 \quad , \quad \eta'''\varepsilon' + \eta'\varepsilon''' \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

si può anche scrivere

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2(-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = [\gamma, g]' + (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}[\gamma+\varepsilon', g+\eta']' - \\ - (-1)^{\varepsilon''(\eta''+s)}\,[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']' - (-1)^{\varepsilon'''(\eta'''+s)}\,[\gamma+\varepsilon''', g+\eta''']' \end{aligned}$$

Dalle formole (1) e (2) segue ora sommando membro a membro:

$$(\text{III})\qquad \begin{aligned} [\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = [\gamma, g]' + \\ + (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon', g+\eta']' \end{aligned}$$

e sottraendo invece membro a membro:

$$(\text{III})'\qquad \begin{aligned} [\gamma, g] - (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)}\,[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = \\ = (-1)^{\varepsilon''(\eta''+s)}\,[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']' + (-1)^{\varepsilon'''(\eta'''+s)}\,[\gamma+\varepsilon''', g+\eta''']' \end{aligned}$$

2. Le formole (III) e (III)′ sono contenute, come sarebbe facile di dimostrare, nell'unica formola più generale:

$$\begin{aligned} (-1)^{\varepsilon s+\varepsilon+\eta}\,[\gamma+\varepsilon, g+\eta] \mp (-1)^{\varepsilon' s+\varepsilon'+\eta'}\,[\gamma+\varepsilon', g+\eta'] = \\ \pm (-1)^{\varepsilon'' s+\varepsilon''+\eta''}[\gamma+\varepsilon'', g+\eta'']' - (-1)^{\varepsilon''' s+\varepsilon'''+\eta'''}[\gamma+\varepsilon''', g+\eta''']' \end{aligned}$$

nella quale si dovranno prendere i segni inferiori quando:

$$(\varepsilon, \eta) \quad , \quad (\varepsilon', \eta') \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

siano quattro coppie arbitrarie di numeri interi, purchè distinte fra loro (mod. 2); si dovranno prendere invece i segni superiori quando siano soddisfatte le condizioni:

$$(\varepsilon'', \eta'') \equiv (\varepsilon, \eta) \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''') \equiv (\varepsilon', \eta') \qquad (\text{mod. } 2)$$

Rammentiamo che in tutte queste formole le caratteristiche $\gamma_\varrho, g_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ sono assoggettate alle sole condizioni che

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4) = \sigma \quad \text{ed} \quad \tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4) = s$$

siano numeri interi.

IV.

1. Lasciando *affatto arbitrarie* le $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ e prendendo:

$$\gamma_3 = \mu - \gamma_1 - \gamma_2 \quad , \quad g_3 = m - g_1 - g_2 \quad , \quad \gamma_4 = \mu \quad , \quad g_4 = m$$
$$\varepsilon' = 1 - \mu \quad , \quad \eta' = 1 - m$$

dove μ ed m siano due *interi* qualisivogliano, pel momento non entrambi $\equiv 1$ (mod. 2), cosicchè:

$$\sigma = \mu \quad , \quad s = m;$$

ponendo inoltre

$$z_1 = u + v \quad , \quad z_2 = u - v \quad , \quad z_3 = 0 \quad , \quad z_4 = 0$$

dimodochè:

$$z'_1 = v \quad , \quad z'_2 = -v \quad , \quad z'_3 = -u \quad , \quad z'_4 = -u ,$$

la formola (III) ci dà:

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1\\ g_1\end{bmatrix}(u+v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2\\ g_2\end{bmatrix}(u-v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu\\ g_1+g_2-m\end{bmatrix}(0) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\mu\\ m\end{bmatrix}(0) = \\ &= \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1\\ g_1\end{bmatrix}(v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2\\ g_2\end{bmatrix}(-v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu\\ g_1+g_2-m\end{bmatrix}(u) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\mu\\ m\end{bmatrix}(u) + \\ &+ (-1)^{\mu} \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+1-\mu\\ g_1+1-m\end{bmatrix}(v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+1-\mu\\ g_2+1-m\end{bmatrix}(-v) \times \\ &\times \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-1\\ g_1+g_2-1\end{bmatrix}(u) \, . \, \vartheta_{11}(u). \end{aligned}$$

Del resto questa formola sussiste poi senza eccezioni qualunque siano gli interi m e μ; giacchè per $m \equiv \mu \equiv 1$ (mod. 2) si riduce all'identità.

2. Fatte le stesse posizioni, la formola (III)$'$ ci dà invece:

$$\begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1\\ g_1\end{bmatrix}(u+v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2\\ g_2\end{bmatrix}(u-v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu\\ g_1+g_2-m\end{bmatrix}(0) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\mu\\ m\end{bmatrix}(0) = \\ &(-1)^{\varepsilon''(\eta''+m)} \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon''\\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon''\\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(-v) \times \\ &\times \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon''\\ g_1+g_2-m-\eta''\end{bmatrix}(u) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\mu+\varepsilon''\\ m+\eta''\end{bmatrix}(-u) + \\ &+ (-1)^{\varepsilon'''(\eta'''+m)} \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'''\\ g_1+\eta'''\end{bmatrix}(v) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'''\\ g_2+\eta'''\end{bmatrix}(-v) \times \\ &\times \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon'''\\ g_1+g_2-m-\eta'''\end{bmatrix}(u) \, . \, \vartheta\begin{bmatrix}\mu+\varepsilon'''\\ m+\eta'''\end{bmatrix}(-u). \end{aligned}$$

Osservando però che:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\mu+\varepsilon''\\ m+\eta''\end{bmatrix}(-u)=(-1)^{m(\mu+\varepsilon'')}\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon''\\ m-\eta''\end{bmatrix}(u)=$$
$$=(-1)^{m\varepsilon''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon''\\ m-\eta''\end{bmatrix}(u),$$

si scriverà meglio come segue:

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1\\ g_1\end{bmatrix}(u+v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2\\ g_2\end{bmatrix}(u-v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu\\ m\end{bmatrix}(0)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu\\ g_1+g_2-m\end{bmatrix}(0)=\\
&=(-1)^{\varepsilon''\eta''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon''\\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon''\\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(-v)\times\\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon''\\ m-\eta''\end{bmatrix}(u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon''\\ g_1+g_2-m-\eta''\end{bmatrix}(u)+\\
&+(-1)^{\varepsilon'''\eta'''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'''\\ g_1+\eta'''\end{bmatrix}(v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'''\\ g_2+\eta'''\end{bmatrix}(-v)\times\\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon'''\\ m-\eta'''\end{bmatrix}(u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon'''\\ g_1+g_2-m-\eta'''\end{bmatrix}(u).
\end{aligned}\tag{IV$'$}$$

Rammentiamo che in queste formole (¹) i numeri interi ε', η', ε'', η'' debbono scegliersi in modo che le quattro coppie:

$$(0\,,0)\quad,\quad(1+\mu\,,1+m)\quad,\quad(\varepsilon'',\eta'')\quad,\quad(\varepsilon''',\eta''')$$

siano fra loro distinte (mod. 2).

3. Tenendo presente quanto si è detto in fine del precedente §, è facile riconoscere che le formole (IV) e (IV)′ sono contenute nell'unico tipo più generale:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m\mu+\varepsilon+\eta}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon\\ g_1+\eta\end{bmatrix}(u+v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon\\ g_2+\eta\end{bmatrix}(u-v)\times\\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon\\ g_1+g_2-m-\eta\end{bmatrix}(0)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu & \varepsilon\\ m-\eta\end{bmatrix}(0)=\\
&=\pm(-1)^{\varepsilon''+\eta''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon''\\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon''\\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(-v)\times\\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon''\\ g_1+g_2-m-\eta''\end{bmatrix}(u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon''\\ m-\eta''\end{bmatrix}(u)-\\
&-(-1)^{\varepsilon'''+\eta'''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'''\\ g_1+\eta'''\end{bmatrix}(v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'''\\ g_2+\eta'''\end{bmatrix}(-v)\times\\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\gamma_2-\mu-\varepsilon'''\\ g_1+g_2-m-\eta'''\end{bmatrix}(u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\mu-\varepsilon'''\\ m-\eta'''\end{bmatrix}(u)
\end{aligned}$$

(¹) Il fatto che le formole (IV) e (IV)′ sussistono non solamente per valori interi, ma anche per valori reali od imaginarii qualisivogliano delle caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$, è già stato oggetto di poche parole da me dette, senza però entrare nelle relative dimostrazioni, nella sezione di Analisi del III Congresso internazionale dei matematici (Heidelberg, Agosto 1904).

dove i segni superiori corrispondono al caso di:

$$\varepsilon'' \equiv \varepsilon \quad , \quad \eta'' \equiv \eta \quad , \quad \varepsilon''' \equiv 1 - \mu \quad , \quad \eta''' \equiv 1 - m \qquad (\text{mod. } 2)$$

e gli inferiori al caso in cui

$$(\varepsilon , \eta) \quad , \quad (1 - \mu , 1 - m) \quad , \quad (\varepsilon'' , \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''' , \eta''')$$

sono quattro coppie di numeri interi fra loro distinte (mod. 2).

V.

1. Ritornando alla formola del § II:

$$2\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon' \\ g_1+\eta'\end{bmatrix}(z_1)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon' \\ g_2+\eta'\end{bmatrix}(z_2)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon' \\ g_3+\eta'\end{bmatrix}(z_3)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon' \\ g_4+\eta'\end{bmatrix}(z_4) =$$

$$= \sum_{\varepsilon,\eta}^{0,1} (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon \\ g_1+\eta\end{bmatrix}(z'_1)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon \\ g_2+\eta\end{bmatrix}(z'_2)\,\times$$

$$\times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon \\ g_3+\eta\end{bmatrix}(z'_3)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon \\ g_4+\eta\end{bmatrix}(z'_4)$$

in cui le γ_ρ , g_ρ $(\varrho = 1, 2, 3, 4)$ sono assoggettate alle sole condizioni che

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4) \quad , \quad s = \tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3+g_4)$$

siano numeri interi ed ε', η' sono due interi affatto arbitrarii, poniamo:

$$z_1 = v + t \quad , \quad z_2 = v - t \quad , \quad z_3 = -w - u \quad , \quad z_4 = w - u$$

cosicchè:

$$z'_1 = u + t \quad , \quad z'_2 = u - t \quad , \quad z'_3 = -w - v \quad , \quad z'_4 = w - v .$$

Otteniamo:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon' \\ g_1+\eta'\end{bmatrix}(v+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon' \\ g_2+\eta'\end{bmatrix}(v-t)\,\times \\ &\quad\times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon' \\ g_3+\eta'\end{bmatrix}(-w-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon' \\ g_4+\eta'\end{bmatrix}(w-u) = \\ &= \sum_{\varepsilon,\eta}^{0,1} (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon \\ g_1+\eta\end{bmatrix}(u+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon \\ g_2+\eta\end{bmatrix}(u-t)\,\times \\ &\quad\times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon \\ g_3+\eta\end{bmatrix}(-w-v)\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon \\ g_4+\eta\end{bmatrix}(w-v). \end{aligned}$$

Se poniamo invece:

$$z_1 = w + t \quad , \quad z_2 = w - t \quad , \quad z_3 = -v - u \quad , \quad z_4 = v - u ,$$

cosicchè:

$$z'_1 = u + t \quad , \quad z'_2 = u - t \quad , \quad z'_3 = -w - v \quad , \quad z'_4 = v - w ,$$

otteniamo, essendo ε'' ed η'' due interi arbitrarii:

$$
\begin{aligned}
& 2\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon''\\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(w+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon''\\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(w-t)\times\\
& \times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon''\\ g_3+\eta''\end{bmatrix}(-v-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon''\\ g_4+\eta''\end{bmatrix}(v-u)=\\
(2)\qquad & =\sum_{\varepsilon,\eta}^{0,1}(-1)^{(\varepsilon+\varepsilon'')(\eta+\eta''+s)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon\\ g_1+\eta\end{bmatrix}(u+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon\\ g_2+\eta\end{bmatrix}(u-t)\times\\
& \times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon\\ g_3+\eta\end{bmatrix}(-w-v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon\\ g_4+\eta\end{bmatrix}(v-w).
\end{aligned}
$$

2. Incominciamo con prendere nelle (1) e (2):

$$\varepsilon'=\varepsilon''\quad,\quad \eta'=\eta''\quad,\quad \gamma_4=0\quad,\quad g_4=0\,.$$

Poichè allora:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_4+\varepsilon\\ g_4+\eta\end{bmatrix}(v-w)=\vartheta\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -\eta\end{bmatrix}(w-v)=(-1)^{\varepsilon\eta}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \eta\end{bmatrix}(w-v),$$

si avrà, sottraendo la (2) membro a membro dalla (1) e scrivendo poi ε,η in luogo di ε',η', la relazione:

$$
\begin{aligned}
& \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon\\ g_1+\eta\end{bmatrix}(v+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon\\ g_2+\eta\end{bmatrix}(v-t)\times\\
& \times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon\\ g_3+\eta\end{bmatrix}(-w-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \eta\end{bmatrix}(w-u)-\\
& -\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon\\ g_1+\eta\end{bmatrix}(w+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon\\ g_2+\eta\end{bmatrix}(w-t)\times\\
(\mathrm{V})\qquad & \times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon\\ g_3+\eta\end{bmatrix}(-v-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \eta\end{bmatrix}(v-u)=\\
& =(-1)^{(1+\varepsilon)(1+\eta+s)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+1\\ g_1+1\end{bmatrix}(u+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+1\\ g_2+1\end{bmatrix}(u-t)\times\\
& \times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+1\\ g_3+1\end{bmatrix}(-w-v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(w-v).
\end{aligned}
$$

In questa relazione ε ed η sono due interi qualisivogliano. I numeri $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,g_1,g_2,g_3$ sono poi assoggettati alle sole condizioni che:

$$\sigma=\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\ \text{ed}\ s=\tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3)$$

siano interi.

3. Supposto in secondo luogo nelle (1) e (2) la coppia (ε',η') distinta (mod. 2) dalla coppia (ε'',η'') e ponendo ancora come sopra $\gamma_4=g_4=0$,

si deduce sommando o sottraendo membro a membro:

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&2\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon' \\ g_1+\eta'\end{bmatrix}(v+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon' \\ g_2+\eta'\end{bmatrix}(v-t)\times \\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon' \\ g_3+\eta'\end{bmatrix}(-w-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon' \\ \eta'\end{bmatrix}(w-u)= \\
&\pm 2\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'' \\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(w+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'' \\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(w-t)\times \\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon'' \\ g_3+\eta''\end{bmatrix}(-v-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon'' \\ \eta''\end{bmatrix}(v-u)= \\
&=\sum_{\varepsilon,\eta}^{0,1} A_{\varepsilon,\eta}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon \\ g_1+\eta\end{bmatrix}(u+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon \\ g_2+\eta\end{bmatrix}(u-t)\times \\
&\times\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon \\ g_3+\eta\end{bmatrix}(-w-v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \eta\end{bmatrix}(w-v)
\end{aligned}
$$

dove si è posto per brevità:

$$A_{\varepsilon,\eta}=(-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)}\pm(-1)^{(\varepsilon+\varepsilon'')(\eta+\eta''+s)+\varepsilon\eta}.$$

Si può anche scrivere, come è facile di riconoscere:

$$(4)\quad A_{\varepsilon,\eta}=(-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)}\{1\pm(-1)^{\varepsilon\eta'+\eta\varepsilon'+\varepsilon\eta''+\eta\varepsilon''+\varepsilon\eta}(-1)^{s(\varepsilon'+\varepsilon'')+\varepsilon'\eta'+\varepsilon''\eta''}\}.$$

Imponiamo ora alle coppie (ε', η') ed (ε'', η'') le condizioni:

$$\varepsilon'\eta'\equiv 0 \quad , \quad \varepsilon''\eta''\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2);$$

e sia $(\varepsilon''', \eta''')$ la terza coppia di numeri interi, perfettamente determinata (mod. 2), che è distinta dalle (ε', η') ed (ε'', η'') e soddisfa del pari alla condizione:

$$\varepsilon'''\eta'''\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Nella sommatoria che figura nel secondo membro di (3), la coppia (ε, η) dovrà percorrere i quattro sistemi:

$$(1,1) \quad , \quad (\varepsilon', \eta') \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''').$$

Per i primi tre sistemi l'esponente che si presenta in (4):

$$\varepsilon\eta'+\eta\varepsilon'+\varepsilon\eta''+\eta\varepsilon''+\varepsilon\eta$$

prende rispettivamente i valori (mod. 2):

$$\varepsilon'+\eta'+\varepsilon''+\eta''+1 \quad , \quad \varepsilon'\eta''+\eta'\varepsilon'' \quad , \quad \varepsilon'\eta''+\eta'\varepsilon''$$

i quali, come è facile riconoscere, sono congrui fra loro (mod. 2), e per il quarto sistema $(\varepsilon''', \eta''')$ prende il valore (mod. 2):

$$\varepsilon'''\eta'+\eta'''\varepsilon'+\varepsilon'''\eta''+\eta'''\varepsilon''\equiv\varepsilon'+\eta'+\varepsilon''+\eta'' \qquad (\text{mod. } 2).$$

Se dunque nella formola (3) noi scegliamo il segno $\pm$ secondochè

$$(-1)^{\varepsilon'+\varepsilon''+\eta'+\eta''+s(\varepsilon'+\varepsilon'')}$$

sia uguale a $+1$ ovvero a -1, otteniamo:

$$A_{1,1} = A_{\varepsilon',\eta'} = A_{\varepsilon'',\eta''} = 0$$

$$A_{\varepsilon''',\eta'''} = 2(-1)^{(\varepsilon'''+\varepsilon')(\eta'''+\eta'+s)} = -2(-1)^{\varepsilon'+\eta'+\varepsilon'''+\eta'''+s(\varepsilon'+\varepsilon''')}$$

cosicchè dalla (3) moltiplicata per

$$(-1)^{\varepsilon'+\eta'+s\varepsilon'}$$

tenendo presente che

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon''\\ \eta''\end{bmatrix}(v-u) = (-1)^{\varepsilon''\eta''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon''\\ \eta''\end{bmatrix}(u-v) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon''\\ \eta''\end{bmatrix}(u-v), \text{ ecc.,}$$

si ha la relazione:

$$\text{(V)}' \quad \begin{aligned} 0 = (-1)^{\varepsilon'+\eta'+s\varepsilon'}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'\\ g_1+\eta'\end{bmatrix}(v+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'\\ g_2+\eta'\end{bmatrix}(v-t)\,\times \\ \times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon'\\ g_3+\eta'\end{bmatrix}(-w-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon'\\ \eta'\end{bmatrix}(w-u)\,+ \\ +(-1)^{\varepsilon''+\eta''+s\varepsilon''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon''\\ g_1+\eta''\end{bmatrix}(w+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon''\\ g_2+\eta''\end{bmatrix}(w-t)\,\times \\ \times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon''\\ g_3+\eta''\end{bmatrix}(-v-u)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon''\\ \eta''\end{bmatrix}(u-v)\,+ \\ +(-1)^{\varepsilon'''+\eta'''+s\varepsilon'''}\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1+\varepsilon'''\\ g_1+\eta'''\end{bmatrix}(u+t)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_2+\varepsilon'''\\ g_2+\eta'''\end{bmatrix}(u-t)\,\times \\ \times\,\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_3+\varepsilon'''\\ g_3+\eta'''\end{bmatrix}(-w-v)\,.\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon'''\\ \eta'''\end{bmatrix}(v-w). \end{aligned}$$

In questa formola le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$ devono essere tali che le semisomme:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \quad , \quad s = \tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3)$$

siano numeri interi [1]; nel mentre che le tre coppie di numeri interi

[1] Nel caso particolare in cui si ritengano dover essere intere le stesse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$, le formole (V) e (V)′ equivalgono al sistema delle relazioni date dal sig. Study nella sua monografia: *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen* (Abhandl. der k. Sächsischen Ges. der Wiss. Band XX, 1893, pag. 195). Cfr. anche Krazer, Lehrbuch der Thetafunctionen (Leipzig, Teubner 1903), pagg. 323-325.

(ε', η') , (ε'', η'') , $(\varepsilon''', \eta''')$ devono essere distinte fra loro (mod. 2) e soddisfare alle condizioni:

$$\varepsilon'\eta' \equiv \varepsilon''\eta'' \equiv \varepsilon'''\eta''' \qquad (\text{mod. } 2).$$

Si vede pertanto che la (V)' equivale sostanzialmente alla relazione:

$$\vartheta_{\gamma_1,g_1}(v+t)\,.\,\vartheta_{\gamma_2,g_2}(v-t)\,.\,\vartheta_{\gamma_3,g_3}(-w-u)\,.\,\vartheta_{00}(w-u) =$$
$$= \vartheta_{\gamma_1,g_1+1}(w+t)\,.\,\vartheta_{\gamma_2,g_2+1}(w-t)\,.\,\vartheta_{\gamma_3,g_3+1}(-v-u)\,.\,\vartheta_{01}(u-v) +$$
$$+ (-1)^s\,\vartheta_{\gamma_1+1,g_1}(u+t)\,.\,\vartheta_{\gamma_2+1,g_2}(u-t)\,.\,\vartheta_{\gamma_3+1,g_3}(-v-u)\,.\,\vartheta_{10}(v-w).$$

Patologia — *Uno sguardo alle nostre ricerche sul gozzo e sul cretinismo endemici.* Quinta Nota preliminare del Socio B. Grassi e di L. Munaron.

Notoriamente il gozzo e il cretinismo endemici formanti un'unica entità morbosa, che si può denominare brevemente tiroidismo endemico, erano stati collocati in un medesimo gruppo colla malaria e supposti come questa originati da miasmi.

Dopo le nuove scoperte sulla malaria, noi credemmo opportuno di affrontare l'argomento del tiroidismo endemico, tanto più che Grasset aveva descritto dei parassiti simili a quelli della malaria, da lui riscontrati nel sangue di soggetti colpiti da gozzo endemico.

Le nostre ricerche, fatte in quest'ultimo triennio, ci permettono di riassumere nei termini seguenti lo stato attuale della questione.

***

Abbiamo intrapreso una prima serie di ricerche dirette a dimostrare se sussistesse anche per il gozzo endemico una contagiosità diretta, ovvero indiretta, vale a dire paragonabile a quella della malaria.

Dopo molte e svariate prove noi siamo arrivati a queste conclusioni:

1.° Il gozzo, ancorchè di recente sviluppato, non si può coll'innesto riprodurre in altri animali della stessa specie; nè si può propagare coll'innesto dell'ipofisi o del sangue, e neppure somministrando opportunamente per bocca contenuto intestinale degli animali infetti.

Queste nostre ricerche fatte sui cani, vengono confermate da esperienze di innesti tiroidei intrapresi per altri scopi sull'uomo da Cristiani.

Tutti insieme i fatti or detti tendono ad escludere la supposta analogia tra la malaria e il gozzo.

2.° Un animale infettatosi anche di recente, chiuso in ambiente dove il gozzo non sia endemico, con animali indenni, non li contagia. Le osserva-