ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

pensazione riesca imperfetta, non ci deve far meraviglia, quando si rifletta ciò che succede per gli altri organi.

Rimangono da spiegare la ereditarietà del gozzo e il cretinismo. Se si ammettesse la ereditarietà delle proprietà acquisite, la spiegazione si troverebbe facilmente. D'altra parte bisogna confessare che l'argomento della ereditarietà riguardo al gozzo e al cretinismo è troppo poco studiato; il fatto però che quando una madre di parecchi cretini passa in un luogo immune, non ha più figli cretini, condurrebbe a credere che la stessa causa che agisce sulla tiroide della madre agisca anche sulla tiroide del feto, ma di questo argomento si occupa più specialmente uno di noi (Munaron) in una Nota che viene presentata contemporaneamente alla presente.

Riunendo insieme quanto abbiamo fin qui detto, ci sembra di poter conchiudere che nello stato attuale delle nostre conoscenze la causa diretta del gozzo deve cercarsi nella quantità di iodio contenuto nell'ambiente e più particolarmente nella polvere atmosferica, e che questa causa diretta deve alla sua volta rapportarsi agli organismi conviventi nello stesso ambiente, in cui stanno gli animali nei quali si manifesta il gozzo endemico.

La questione, messa in questi termini, offre certamente un grandissimo interesse scientifico e noi speriamo di poter ottenere i pochi mezzi necessarî per svolgerla ulteriormente.

Matematica. — *Sui gruppi di movimenti.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il gruppo dei movimenti di uno spazio euclideo ad n dimensioni è un gruppo ad $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri che ha per operazioni infinitesime generatrici le traslazioni

$$T_1 = p_1\,,\ T_2 = p_2\,, \ldots,\ T_n = p_n$$

e le rotazioni

$$R_{ik} = x_i\,p_k - x_k\,p_i\ (i\,,\,k = 1\,, \ldots, n).$$

Si avrà $R_{ik} = - R_{ki}$. Le formule che danno la composizione del gruppo sono

$$(T_i\,T_k) = 0\ (R_{ik}\,T_l) = 0\ (R_{ik}\,T_i) = -T_k\ (R_{ik}\,R_{lm}) = 0\ (R_{ik}\,R_{il}) = -R_{kl}$$
$$(i\,,\,k\,,\,l\,,\,m \text{ essendo indici diversi}).$$

Chiameremo traslazione una combinazione lineare di traslazioni, rotazione una combinazione lineare di rotazioni. Con un conveniente movimento reale si può portare [1] la più generale operazione infinitesima del gruppo nella forma

$$(1)\quad Xf = h_1 \mathrm{R}_{12} + h_2 \mathrm{R}_{34} + \ldots + h_r \mathrm{R}_{2r-1\,2r} + a_{2r'+1} \mathrm{T}_{2r'+1} + \ldots + a_n \mathrm{T}_n \;(r' \geq r).$$

Se una operazione Xf è portata nella forma (1) o più generalmente nella forma $Xf = \sum_{hk \leq 2r} b_{hk} \mathrm{R}_{hk} + \sum_i a_{2r+i} \mathrm{T}_{2r+i}$ $(b_{hk} = -b_{kh})$, si vede chiaramente che essa trasforma in sè gli S_{n-1} di equazione $\sum_1^{n-2r} \alpha_{2r+i} x_{2r+i} = c$ dove c è una costante arbitraria e le α_{2r+i} sono tali che $\Sigma a_{2r+i} \alpha_{2r+i} = 0$. E viceversa. Se quindi chiamiamo *eliche* le traiettorie di un gruppo ad un parametro di movimenti, perchè le eliche di Xf appartengano all'S_n ambiente e non ad uno spazio lineare subordinato, è necessario che non esistano S_{n-1} trasformati in sè da Xf, e quindi che in (1) r sia il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$ e che nessuno dei coefficienti h, a sia nullo.

2. *I gruppi a due parametri.* — Ci proponiamo di mostrare che *ogni sottogruppo reale a due parametri del gruppo dei movimenti è abeliano.* Incominciamo dal trattare alcuni casi particolari. È bene evidente che la cosa è vera se il gruppo è generato da due traslazioni. Supponiamo che il gruppo sia generato da una traslazione e da una rotazione: supponiamo che la rotazione sia portata nella forma (1) $R = \sum_1^r h_i \mathrm{R}_{2i-1\,2i}$ e che la traslazione sia $T = \sum_1^n a_i \mathrm{T}_i$. Siccome le traslazioni formano un sottogruppo invariante nel gruppo dei movimenti, sarà $(RT) = \varrho T$. Ma l'equazione

$$(RT) = \left(\sum_1^r h_i \mathrm{R}_{2i-1\,2i} \sum_1^n a_i \mathrm{T}_i\right) = -\sum_1^r a_{2i-1} h_i \mathrm{T}_{2i} + \sum_1^r a_{2i} h_i \mathrm{T}_{2i-1} = \varrho \sum_1^n a_i \mathrm{T}_i$$

si spezza nelle altre

$$h_i a_{2i-1} = \varrho a_{2i} \qquad h_i a_{2i} = -\varrho a_{2i-1} \;(i \leq r) \qquad o = \varrho a_k \;(k > 2r).$$

Quindi o sarà $\varrho = 0$ $a_{2i-1} = a_{2i} = 0$ $(i < r)$: il gruppo sarà abeliano e T non conterrà che indici $> 2r$. Oppure dalle prime equazioni si dedurrà $\varrho^2 = -1$ e quindi il gruppo non sarà reale. Quindi ogni gruppo reale generato da una traslazione e da una rotazione è abeliano; se la rotazione è della forma $R = \sum_1^r h_i \mathrm{R}_{2i-1\,2i}$ la traslazione è della forma $T = \sum_1^{n-2r} a_{2r+i} \mathrm{T}_{2r+i}$.

[1] Cfr. Bemporad, *Sui gruppi dei movimenti*, pag. 13. Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, tomo IX, od anche Schoute, *Le déplacement le plus général de l'espace à* n *dimensions*. Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft, tomo VII, 1891.

Supponiamo ora che il gruppo sia generato da due rotazioni R ed R_1; supponiamo di più che R sia della forma (1): $R = \sum_1^{2r} h_i \,\mathrm{R}_{2i-1\,2i}$ e che sia $R_1 = \Sigma b_{hk} \,\mathrm{R}_{hk}$ $(b_{hk} = - b_{kh}\,,\, b_{hh} = 0)$. Se non è $(R\,R_1) = \varrho R$ sostituendo a R_1 una conveniente combinazione lineare di R e R_1 si può supporre che si abbia $(R\,R_1) = \varrho R_1$. Ora

$$
(2)\quad (R\,R_1) = \sum_{\substack{ij \leq r \\ i \neq j}} h_i\, b_{2i2j}\, \mathrm{R}_{2i-1\,2j} + \sum h_i\, b_{2i2j-1}\, \mathrm{R}_{2i-1\,2j-1} - \sum h_i\, b_{2i-1\,2j}\, \mathrm{R}_{2i2j} - \\ - \sum h_i\, b_{2i-1\,2j-1}\, \mathrm{R}_{2i2j-1} + \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i\, b_{2ik}\, \mathrm{R}_{2i-1k} - \sum h_i\, b_{2i-1k}\, \mathrm{R}_{2ik}
$$

$(R\,R_1)$ non contiene quindi termini in R_{2i2i-1} e quindi non può essere uguale a ϱR. Sia $(R\,R_1) = \varrho R_1$. Uguagliando i coefficienti di una stessa rotazione in (2) ed in ϱR_1 si ottiene:

$$
(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} h_i\, b_{2i2j} - h_j\, b_{2i-12j-1} = \varrho b_{2i-12j} \\ h_i\, b_{2i-12j-1} - h_j\, b_{2i2j} = - \varrho b_{2i2j-1} \end{array} \right. \quad (ij \leq r)
$$

$$
(4)\quad \left. \begin{array}{l} h_i\, b_{2i2j-1} + h_j\, b_{2i-12j} = \varrho b_{2i-12j-1} \\ h_i\, b_{2i-12j} + h_j\, b_{2i2j-1} = - \varrho b_{2i2j} \end{array} \right\} \quad (i\,, j \leq r)
$$

$$
(5)\quad h_i\, b_{2ik} = \varrho b_{2i-1k} \qquad h_i\, b_{2i-1k} = - \varrho b_{2ik} \qquad (i \leq r\,, k > 2r)
$$

$$
(6)\quad 0 = \varrho b_{hk}\, (h\,, k > 2r)\,.
$$

Dalle (6) si deduce $\varrho = 0$ o $b_{hk} = 0$. Se $\varrho = 0$ il gruppo è abeliano; le (5) ci dicono $b_{2ik} = b_{2i-1k} = 0$ $(i \leq r\,, k > 2r)$: in R_1 non esistono quindi che operazioni R_{hk} con ambedue gli indici $\leq 2r$ od ambedue $> 2r$: potremo porre $R_1 = R_1' + R_1''$. R_1'' sarà una qualunque combinazione lineare di operazioni R_{hk} per cui h e k sono $> 2r$. Quanto ad R_1' esso potrà contenere le operazioni R_{2i-12i} con coefficienti qualunque; le altre operazioni della forma $\mathrm{R}_{2i-1\,2j}\,, \mathrm{R}_{2i2j} \ldots (i\,, j \leq r)$ dovranno avere coefficienti che soddisfacciano le (3), (4) che in questo caso divengono

$$
(3')\quad \begin{array}{l} h_i\, b_{2i2j} - h_j\, b_{2i-12j-1} = 0 \\ h_i\, b_{2i-1\,2j-1} - h_j\, b_{2i2j} = 0 \end{array} \qquad (4')\quad \begin{array}{l} h_i\, b_{2i2j-1} + h_j\, b_{2i-12j} = 0 \\ h_i\, b_{2i-12j} + h_j\, b_{2i2j-1} = 0 \end{array}
$$

È ben evidente che questi due sistemi di equazioni non possono essere soddisfatti che quando $h_i = \pm h_j$. Quindi R_1' oltre alle operazioni R_{2i-12j} potrà solo contenere le operazioni $(\mathrm{R}_{2i2j} \mp \mathrm{R}_{2i-12j-1})$, $(\mathrm{R}_{2i-12j} \mp \mathrm{R}_{2i2j-1})$ e ciò quando in R sia $h_i = \pm h_j$ (si debbono prendere tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori contemporaneamente).

Se ϱ non è 0, il gruppo non è reale. Ciò risulta evidente dalle (5) quando non sia $b_{2ik} = b_{2i-1k} = 0$ poichè allora si ha $\varrho^2 = -1$. Se poi $b_{2ik} = b_{2i-k} = 0$, si consideri il sistema di equazioni lineari omogenee nelle $b_{2i-12j-1}, b_{2i-12j}, b_{2i2j}, b_{2i2j-1}$ formati dalle (3) e (4): affinchè questi coefficienti b non siano nulli, ϱ deve essere soluzione dell'equazione

$$0 = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & h_i & -h_j \\ 0 & -\varrho & h_j & -h_i \\ -h_i & -h_j & -\varrho & 0 \\ h_j & h_i & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 + \varrho^2 (h_i + h_j)^2 + \begin{vmatrix} h_i & h_j \\ h_j & h_i \end{vmatrix}^2$$

Ora questa equazione ammette solo radici nulle od immaginarie (¹); talchè, se si richiede che il gruppo sia reale, non si potrà supporre che $\varrho = 0$. Infine se fossero nulli tutti i coefficienti $b_{2ik}\, b_{2i-1k}\, b_{2i-12j}\, b_{2i2j} \ldots$ R_1 non potrebbe contenere che le operazioni R_{2i-12i} per $i \leq r$ e le R_{hk} per $hk > 2r$ e quindi R_1 sarebbe permutabile con R. Concludiamo che il gruppo è ancora abeliano quando è formato da due rotazioni: se di più una delle rotazioni è della forma (1), la precedente discussione ci dà di quale forma deve essere l'altra rotazione.

Veniamo al caso generale. Siano $Xf = R + T$, $X_1 f = R_1 + T_1$ le operazioni generatrici: si avrà $(X X_1) = \alpha Xf + \beta X_1 f$. Ma $(X X_1) = (R R_1) + + [(R T_1) + (T R_1)]$: $(R R_1)$ è una rotazione, $(R T_1) + (T R_1)$ una traslazione: quindi dovrà essere $(R R_1) = \alpha R + \beta R_1$ $(R T_1) + (T R_1) = \alpha T + + \beta T_1$. La prima equazione ci dice che R, R_1 formano un gruppo, esso sarà abeliano e quindi o sarà $\alpha = \beta = 0$ ed Xf, $X_1 f$ genereranno esse pure un gruppo abeliano, oppure sostituendo al più ad $X_1 f$ la combinazione lineare $\alpha Xf + \beta X_1 f$, si potrà supporre che sia $R_1 = 0$. Allora, essendo $X_1 f$ una traslazione T_1, si dovrà avere $(X X_1) = \beta X_1 f$ ossia $(R T_1) = \beta T_1$: quindi R, T_1 genereranno un gruppo che ancora dovrà essere abeliano, ed ancora abeliano sarà il gruppo generato da Xf ed $X_1 f$. Il teorema è quindi dimostrato.

3. Possiamo ad esso dare la forma seguente: *Le superficie a due dimensioni immerse in uno spazio euclideo ad n dimensioni che ammettono un gruppo a due parametri di movimenti dello spazio ambiente sono sviluppabili* (a curvatura nulla) *e le traiettorie del gruppo sono le geodetiche della superficie.*

Non è questo che un caso particolare di un teorema del prof. Bianchi (²)

(¹) Questa proprietà è vera per tutte quelle equazioni che si ottengono come la precedente sostituendo agli zeri della diagonale principale di un determinante emisimmetrico l'incognita ϱ ed uguagliando a 0.

(²) Bianchi, *Sugli spazi a 3 dimensioni che ammettono un gruppo di movimenti.* Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1898, § 15.

per cui se uno spazio ad n dimensioni ammette un gruppo abeliano ad n parametri è a curvatura nulla e le traiettorie delle operazioni del gruppo rappresentano le geodetiche dello spazio. Nel nostro caso per quanto precede il gruppo a due parametri di movimenti dello spazio ambiente è abeliano; quindi il teorema.

4. Possiamo aggiungere alcune osservazioni circa le operazioni generatrici del gruppo. Supponiamo che $Xf = R + T$ sia della forma (1). Dovrà essere, posto, come prima, $X_1 f = R_1 + T_1$, $(R R_1) = 0$ $(R T_1) + (T R_1) = 0$; quindi, come risulta dalle discussioni del n. 2, R_1 sarà della forma $R_1' + R_1''$ dove R_1' contiene soltanto indici $\leq 2r$ ed R_1' solo indici $> 2r$. D'altra parte $(R T_1)$ non può contenere che T_i con indici $\leq 2r$, $(T R_1) = (T R_1'')$ non contiene che T_i con indici $> 2r$; affinchè $(R T_1) + (T R_1) = 0$ deve essere partitamente $(R T_1) = 0$ $(T R_1) = 0$. Per la prima equazione risulterà dalle discussioni del n. 2 che T_1 non contiene che indici $> 2r$, poichè R è della forma (1). Quindi $R_1'' + T_1$ è una operazione che opera sulle sole variabili x_{2r+i}; e con un conveniente movimento su tali variabili, che non cambierà $R_1\, R_1'$ e trasformerà T di nuovo in una traslazione sulle x_{2r+i}, si potrà portare in forma analoga alla forma (1), in cui cioè la traslazione e la rotazione non hanno indici comuni: supponiamo che dopo ciò R_1'' contenga solo gli indici $\leq 2r_1$ e T_1 solo indici $> 2r_1$ $(r_1 \geq r)$. Anche T non potrà allora contenere che indici $> 2r_1$, poichè $(T R_1) = (T R_1'') = 0$.

Cosicchè, riassumendo, *con un conveniente movimento noi potremo ridurre le operazioni generatrici del gruppo* $Xf = R + T$, $X_1 f = R_1 + T_1$ *contemporaneamente in tal forma che* R *ed* R_1 *non contengano che indici* $\leq 2r_1$ *e* T *e* T_1 *non contengano che indici* $> 2r_1$. Sia dunque $Xf = R + \sum^{n-2r_1} a_{2r_1+i}\, T_{2r_1+i}$, $X_1 f = R_1 + \sum_1^{n-2r_1} b_{2r_1+i}\, T_{2r_1+i}$; il gruppo trasformerà in sè quegli S_{n-1} $\Sigma \alpha_{2r_1+i}\, x_{2r_1+i} = c$ dove c è una costante arbitraria e gli α_{2r_1+i} soddisfano le equazioni $\Sigma a_{2r_1+i}\, \alpha_{2r_1+i} = 0$ $\Sigma b_{2r_1+i}\, \alpha_{2r_1+i} = 0$. Affinchè tali S_{n-1} non esistano, e quindi il luogo dei punti in cui un punto dato è portato dalle operazioni del gruppo Xf, $X_1 f$ non appartenga ad uno spazio lineare subordinato, sarà necessario che le due ultime equazioni scritte non ammettano soluzione. Perciò deve essere $2r_1 \leq n - 2$: se n è pari sarà quindi $2r_1 = n - 2$ o $2r_1 = n$; se n è dispari non potrà essere che $2r_1 = n - 1$. Possiamo quindi enunciare: *Se una superficie immersa in uno spazio ad un numero dispari di dimensioni* (e non in uno spazio lineare subordinato), *ammette un* G_2 *di movimenti dello spazio ambiente, per ogni suo punto passa un'elica immersa in uno spazio al più ad* $n - 1$ *dimensioni contenuta totalmente in essa*, poichè tale è l'elica traiettoria di quella operazione infinitesima del gruppo che non contiene traslazione. Analogamente si mostra che *le superficie immerse in uno spazio ad un nu-*

mero pari di dimensioni che ammettono un G_2 *di movimenti dello spazio ambiente sono di due specie: le une* (corrispondenti al caso $2r_1 = n$) *non contengono eliche di* S_{n-1} , *le altre* (corrispondenti al caso $2r_1 = n - 2$) *contengono solo eliche di* S_{n-1}.

5. *Teoremi generali sui sottogruppi del gruppo dei movimenti e sui loro gruppi derivati.* — Con metodi analoghi a quelli tenuti nei numeri precedenti ci proponiamo ora di dimostrare alcuni teoremi generali che ci permetteranno di dedurre immediatamente i tipi dei gruppi di movimenti a tre parametri.

Un gruppo di movimenti non può mai avere il gruppo derivato ad un parametro. Infatti sia, se possibile, $X_1 f = R_1 + T_1$ l'unica operazione del gruppo derivato, siano $X_2 f = (R_2 + T_2) \dots X_m f = R_m + T_m$ le residue operazioni generatrici del gruppo, $X_1 f$ è permutabile con una qualunque operazione Xf; infatti deve essere $(X_1 X) = \varrho X_1 f$ perchè $X_1 f$ è la sola operazione del gruppo derivato, e d'altra parte pel teorema del n. 2 ciò non può essere se non è $\varrho = 0$. D'altra parte dovranno esistere due operazioni la cui alternata è $X_1 f$, supponiamo che siano $X_2 f$ ed $X_3 f$: si avrà quindi $(X_2 X_3) = X_1 f$ $(X_2 (X_2 X_3)) = (X_3 (X_2 X_3)) = 0$. $X_2 f$, $X_3 f$ non possono essere entrambe traslazioni perchè altrimenti $(X_2 X_3) = 0$. Supponiamo quindi che sia $X_2 f = R_2 + T_2$ una operazione della forma (1) e che sia $R_2 \neq 0$. Potrà essere $R_3 = 0$ od $R_3 \neq 0$. Sia $R_3 = 0$: si ponga

$$T_3 = \sum_1^r b_{2i} \mathrm{T}_{2i} + \sum_1^r b_{2i-1} \mathrm{T}_{2i-1} + \sum_{k > 2r} b_k \mathrm{T}_k \,;$$

sarà:

$$X_1 f = (X_2 T_3) = (R_2 T_3) = - \sum_1^r b_{2i-1} h_i \mathrm{T}_{2i} + \sum_1^r b_{2i} h_i \mathrm{T}_{2i-1} .$$

Quindi sarà pure $X_1 f$ una traslazione. Si dovrà avere inoltre

$$0 = (X_2 X_1) = (R_2 X_1) = \Sigma b_{2i-1} h_i^2 \mathrm{T}_{2i-1} - \Sigma b_{2i} h_i^2 \mathrm{T}_{2i} .$$

Dovrà quindi essere

$$b_{2i-1} h_i^2 = 0 \qquad b_{2i} h_i^2 = 0 \qquad (i \leq r)$$

e cioè $b_{2i-1} = b_{2i} = 0$ $(i \leq r)$. Si deduce di qui che $(X_2 T_3) = 0$: quindi $X_1 f$ sarà nulla. L'ipotesi $R_3 = 0$ è quindi assurda.

Sia $R_3 \neq 0$: e precisamente $R_3 = \Sigma b_{hk} \mathrm{R}_{hk}$ $(b_{hk} = - b_{kh})$.

Dall'ipotesi $(X_2 X_3) = X_1 f$ si dedurrà $(R_2 R_3) = R_1$, d'altra parte come già al n. 2 si avrà (formula (2))

$$R_1 = (R_2 R_3) = \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i2j} \mathrm{R}_{2i-12j} + \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i2j-1} \mathrm{R}_{2i-12j-1} - \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i-12j} \mathrm{R}_{2i2j} -$$
$$- \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i-12j-1} \mathrm{R}_{2i2j-1} - \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i b_{2i-1k} \mathrm{R}_{2ik} + \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i b_{2ik} \mathrm{R}_{2i-1k} .$$

L'equazione $0=(X_2 X_1)$ ci darà similmente $0=(R_2 R_1)$, quindi dovrà essere

$$\begin{aligned}0=(R_2\,R_1)= &-\Sigma h_i^2\, b_{2i2j}\,\mathrm{R}_{2i2j}-\Sigma h_i^2\, b_{2i2j-1}\,\mathrm{R}_{2i2j-1}-\Sigma h_i^2\, b_{2i-12j}\,\mathrm{R}_{2i-12j}-\\ &-\Sigma h_i^2\, b_{2i-12j-1}\,\mathrm{R}_{2i-12j-1}+\Sigma h_i\, h_j\, b_{2i2j}\,\mathrm{R}_{2i-.2j-1}-\Sigma h_i\, h_j\, b_{2i2j-1}\,\mathrm{R}_{2i-12j}-\\ &-\Sigma h_i\, h_j\, b_{2i-12j}\,\mathrm{R}_{2i2j-1}+\Sigma h_i\, h_j\, b_{2i-12j-1}\,\mathrm{R}_{2i2j}-\Sigma h_i^2\, b_{2ik}\,\mathrm{R}_{2ik}-\Sigma h_i^2\, b_{2i-1k}\,\mathrm{R}_{2i-1k}.\end{aligned}$$

Si hanno così le equazioni

$$h_i^2\, b_{2ik}=h_i^2\, b_{2i-1k}=0 \qquad (k>2r \;\; i\leq r) \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}b_{2i2j}\,(h_i^2+h_j^2)-2h_i\, h_j\, b_{2i-12j-1}=0\\ 2h_i\, h_j\, b_{2i2j}-(h_i^2+h_j^2)\, b_{2i-1\,2j-1}=0\end{aligned}\right.\;(ji\leq r) \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}b_{2i2j-1}\,(h_i^2+h_j^2)+2h_i\, h_j\, b_{2i-12j}=0\\ 2\, h_i\, h_j\, b_{2i2j-1}+(h_i^2+h_j^2)\, b_{2i-12j}=0\end{aligned}\right.\;(ij\leq r) \tag{9}$$

Le (7) ci dicono $b_{2ik}=b_{2i-1k}=0$ quindi R_3 si spezzerà in due parti $R_3' R_3''$: l'una R_3' contenente solo R_{hk} con indici $\leq 2r$; l'altra R_3'' contenente solo R_{hk} con indici $>2r$ e quindi permutabile con R_2. Quanto ai ai coefficienti di R_3' essi dovranno soddisfare le (8) (9). Affinchè queste equazioni siano risolubili dovrà essere

$$0=\begin{vmatrix}h_i^2+h_j^2 & 2h_i\, h_j\\ 2h_i\, h_j & (h_i^2+h_j^2)\end{vmatrix}=(h_i^2+h_j^2)^2-4h_i^2 h_j^2=(h_i^2-h_j^2)^2$$

Sarà quindi $h_i=\pm h_j$ e si dedurrà $b_{2i\,2j}=\pm b_{2i-12j-1}$ $b_{2i-12j}=\pm b_{2i\,2j-1}$. Ma queste sono le soluzioni di (3') (4') che esprimono che R_2 ed R_3' sono permutabili: quindi la condizione $(R_2 R_1)=(R_2(R_2 R_3))=0$ porta seco l'altra $R_1=(R_2 R_3)=0$. Essendo R_3 permutabile con R_2 porremo $R_3=R_3'+R_3''$ come precedentemente; e si avrà $X_1 f=(X_2\, X_3)=(R_2\, T_3)+(T_2\, R_3'')$ poichè $(T_2\, R_3')=0$. $(R_2\, T_3)$ sarà una traslazione non contenente che indici $\leq 2r$; $(T_2\, R_3'')$ sarà una traslazione non contenente che indici $>2r$ e quindi sarà permutabile con R_2. Quindi si avrà $0=(X_2(X_2\, X_3))=(R_2(R_2\, T_3))$ poichè $(R_2(T_2\, R_3''))=0$. Ma la discussione fatta precedentemente dell'equazione $(X_2(X_2\, X_3))=0$ pel caso in cui $R_3=0$ ci dice allora che $(R_2\, T_3)=0$; e quindi si avrà che $X_1 f=(X_2\, X_3)=(T_2\, R_3'')$ è una traslazione contenente soltanto indici $>2r$. L'equazione $(X_2\, X_1)=0$ sarà allora identicamente soddisfatta, ma dovrà ancora essere soddisfatta l'altra $(X_1\, X_3)=0$ ossia, $((T_2\, R_3'')\, R_3'')=0$. Ricadiamo così nel caso precedentemente trattato scambiati gli indici 2 e 3, e quindi ancora si dedurrà $(T_2\, R_3'')=0$.

Le equazioni $(X_2(X_2\, X_3))=0$ $(X_3(X_2\, X_3))=0$ conducono a conchiudere $(X_2\, X_3)=0$: quindi è dimostrato completamente il teorema enunciato.

Più generalmente potremo enunciare il risultato del presente numero nel modo seguente: *Una operazione del gruppo derivato di un gruppo di* *movimenti non è permutabile con tutte le operazioni del gruppo* (più precisamente essa non è permutabile neppure con tutte le operazioni tali che alternate con una operazione conveniente del gruppo, dànno l'operazione stessa).

6. In modo analogo possiamo ormai dimostrare che *se il gruppo derivato è a due parametri le operazioni del gruppo sono traslazioni.*

Siano infatti $X_1 f$, $X_2 f$ le due operazioni del gruppo derivato, esse sono permutabili in virtù del n. 2. D'altra parte pel teorema precedente non debbono essere permutabili con ogni operazione del gruppo: supponiamo che $X_1 f$ non sia permutabile con $X_3 f$, e supponiamo di più che $(X_1 X_3)$, — che è diversa da $X_1 f$ poichè altrimenti $X_1 f$ $X_3 f$ genererebbero un gruppo a due parametri non abeliano, — sia $X_2 f : (X_1 X_3) = X_2 f$. Siccome si ha $(X_1 X_2) = (X_1 (X_1 X_3)) = 0$ non potrà essere $(X_2 X_3) = ((X_1 X_3) X_3) = 0$ per quanto si vide nel n. 5; nè potrà essere $(X_2 X_3) = \beta X_2$ pel n. 2; quindi si avrà $(X_2 X_3) = ((X_1 X_3) X_3) = \alpha X_1 f + \beta X_2 f$ con $\alpha \neq 0$. Ne segue che $X_3 f$ non può essere una traslazione, altrimenti $X_2 f = (X_1 X_3)$ sarebbe una traslazione pure essa ed $(X_2 X_3) = 0$. Ma allora, ragionando sull'equazione $(X_1 (X_1 X_3)) = 0$ come nel numero precedente sulla $(X_2 (X_2 X_3)) = 0$, segue che le rotazioni R_1 R_3 sono permutabili, onde viene che $X_2 f$ è una traslazione. Ma allora anche $(X_2 X_3) = \alpha X_1 f + \beta X_2 f$ è una traslazione e quindi $X_1 f$ non può essere che una traslazione essa pure. Resta così dimostrato il teorema. Ma ora è facile mostrare di più che è $\beta = 0$, onde verrà che, *supposto che il gruppo derivato di un gruppo di movimenti sia un gruppo a due parametri generato dalle operazioni $X_1 f$, $X_2 f$, esiste nel gruppo una operazione $X_3 f$ tale che*

$$(X_1 X_3) = X_2 f \quad (X_3 X_2) = X_1 f .$$

Infatti noi abbiamo visto che $X_1 f$ ed $X_2 f$ sono due traslazioni e che esiste una operazione $X_3 f$ tale che

$$(X_1 X_3) = X_2 f \quad (X_3 X_2) = \alpha X_1 f + \beta X_2 f \quad (\alpha \neq 0) .$$

Perchè queste equazioni possano essere soddisfatte da movimenti non dovranno potersi trovare dei coefficienti reali λ, μ tali che

$$(X_3\, \lambda X_1 + \mu X_2) = \varrho(\lambda X_1 f + \mu X_2 f) .$$

È facile vedere che perchè ciò accada è necessario che sia $\alpha \geq \frac{\beta^2}{4}$. Sarà quindi $\alpha > 0$ e chiamando $X_1 f$ $X_3 f$ le operazioni $\sqrt{\alpha}\, X_1 f$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} X_3 f$ si avrà

$$(X_1 X_3) = X_2 f \quad (X_3 X_2) = X_1 f + \beta X_2 f \quad (4 \geq \beta^2 \geq 0) .$$

Supponiamo $X_3 f$ ridotto alla forma (1); dalla prima di queste equazioni segue, ricordando che $X_1 f$ ed $X_2 f$ sono traslazioni, che $X_2 f$ non contiene che indici $\leq 2r$, e dalla seconda che lo stesso vale quindi per $X_1 f$. Sia $X_1 f = \Sigma b_{2i}\,\mathrm{T}_{2i} + \Sigma b_{2i-1}\,\mathrm{T}_{2i-1}$. Come nel n. 5 si avrà

$$X_2 f = (X_1\, X_3) = + \Sigma b_{2i-1}\, h_i\, \mathrm{T}_{2i} - \Sigma b_{2i}\, h_i\, \mathrm{T}_{2i-1}$$

$$X_1 f + \beta X_2 f = \Sigma (b_{2i} + \beta\, b_{2i-1}\, h_i)\, \mathrm{T}_{2i} + \Sigma (b_{2i-1} - \beta\, b_{2i}\, h_i)\, \mathrm{T}_{2i-1} =$$
$$= (X_3\, X_2) = \Sigma\, b_{2i-1}\, h_i^2\, \mathrm{T}_{2i-1} + \Sigma\, b_{2i}\, h_i^2\, \mathrm{T}_{2i}\,.$$

Quindi si dedurranno le equazioni

$$b_{2i} + \beta\, b_{2i-1}\, h_i = b_{2i}\, h_i^2 \quad b_{2i-1} - \beta\, b_{2i}\, h_i = b_{2i-1}\, h_i^2\,.$$

Affinchè queste equazioni lineari in $b_{2i}\, b_{2i-1}$ siano risolubili deve aversi

$$\begin{vmatrix} h_i^2 - 1 & -\beta\, h_i \\ \beta\, h_i & h_i^2 - 1 \end{vmatrix} = (h_i^2 - 1)^2 + \beta^2\, h_i^2 = (h_i^2)^2 - h_i^2 (2 - \beta^2) + 1 = 0\,.$$

Affinchè h_i^2 non sia immaginaria dovrà quindi essere

$$0 \leq (2 - \beta^2)^2 - 4 = \beta^2 (\beta^2 - 4)\,,$$

che unito alla limitazione $0 \leq \beta^2 \leq 4$ darà $\beta^2 = 0$ o $\beta^2 = 4$. Se $\beta^2 = 4$ è $h_i^2 = -1$ e quindi h_i immaginario; quindi deve essere $\beta^2 = 0$: ne risulta dimostrato il teorema.

7. *I gruppi a tre parametri.* — Il prof. Bianchi (1) ha classificato le composizioni dei gruppi a tre parametri diverse per isomorfismi reali: dai tipi di gruppi ivi indicati si vede facilmente che i soli gruppi che non hanno che sottogruppi reali a due parametri non abeliani, sono quelli che hanno la composizione seguente:

(I) $(X_1\, X_2) = 0 \quad (X_2\, X_3) = 0 \quad (X_3\, X_1) = 0$

(II) $(X_1\, X_2) = 0 \quad (X_2\, X_3) = X_1 f \quad (X_3\, X_1) = 0$

(III) $(X_1\, X_2) = 0 \quad (X_2\, X_3) = X_1 f + h X_2 f \quad (X_3\, X_1) = X_2 f \quad 0 \leq |h| \leq 2$

(IV) $(X_1\, X_2) = X_3 f \quad (X_2\, X_3) = X_1 f \quad (X_3\, X_1) = X_2 f$.

Un gruppo di movimenti a tre parametri deve essere di uno di questi tipi. Ma il teorema del n. 5 esclude il tipo (II). I teoremi del n. 6 ci dicono che si hanno gruppi di movimenti del tipo (III) solo quando $h = 0$. D'altra parte i ragionamenti stessi del n. 6 dànno il modo di costruire un gruppo del tipo (III) per $h = 0$; il gruppo formato da tre traslazioni è un gruppo del tipo (I); il gruppo formato dalle tre rotazioni di un S_3 subordinato è un gruppo del tipo (IV), quindi possiamo raccogliere il seguente teorema:

Nel gruppo dei movimenti dello spazio ad n dimensioni esistono solo sottogruppi reali a tre parametri aventi le composizioni seguenti:

$(X_1\, X_2) = 0 \quad (X_2\, X_3) = 0 \quad (X_3\, X_1) = 0$

$(X_1\, X_2) = 0 \quad (X_2\, X_3) = X_1 f \quad (X_3\, X_1) = X_2 f \quad$ ($X_1 f$, $X_2 f$ sono traslazioni)

$(X_1\, X_2) = X_3 f \; (X_2\, X_3) = X_1 f \quad (X_3\, X_1) = X_2 f$ (2).

(1) Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono gruppi di movimenti.* Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1898, § 13.

(2) Si può chiedere se esisteranno gruppi a tre parametri colle operazioni non in-

8. *I sottogruppi a due e tre parametri del gruppo di movimenti dello spazio a curvatura costante positiva.* — Se noi consideriamo che il gruppo dei movimenti di uno spazio a curvatura costante positiva ad n dimensioni è in isomorfismo reale col gruppo delle rotazioni di uno spazio euclideo ad $n+1$ dimensioni, dai teoremi dimostrati nei numeri precedenti dedurremo: *Nel gruppo dei movimenti di uno spazio a curvatura costante positiva*: 1°) *i sottogruppi reali a due parametri sono abeliani*; 2°) *i sottogruppi reali a tre parametri hanno la composizione* $(X_1 X_2) = X_3 f$, $(X_2 X_3) = X_1 f$, $(X_3 X_1) = X_2 f$ *del gruppo dei movimenti della sfera o sono abeliani*; 3°) *il gruppo derivato di un sottogruppo reale qualunque non è mai ad uno o due parametri soltanto.*

Fisica. — *Sulla luminescenza dei cristalli.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota precedente [1] ho riferito i risultati di alcune esperienze sulla catodo-luminescenza di alcuni cristalli naturali intese a completare ed estendere le ricerche sullo stesso soggetto compiute da Maskelyne [2] e da G. C. Schmidt [3]. Prima di esporre i risultati delle ricerche d'indole quantitativa sulla polarizzazione parziale che, in alcuni cristalli, è caratteristica di questa luminescenza, credo opportuno riferire qui alcune ulteriori ricerche qualitative da me compiute sulla luminescenza prodotta in certi cristalli artificiali e naturali dalle radiazioni del Radio e dai raggi del Röntgen, e nel vetro deformato meccanicamente dai raggi catodici.

Per le esperienze colle radiazioni del Radio ho potuto disporre di 20 milligrammi di bromuro di Radio del Giesel, chiusi al solito modo in una capsuletta di ebanite munita di una piccola finestra di mica; il cristallo, fissato in una determinata orientazione veniva completamente ricoperto con carta nera, meno una piccola porzione circolare (circa 3 millimetri di diametro) in corrispondenza della faccia del cristallo che si voleva studiare; la capsula contenente il bromuro di Radio veniva accostata a questa porzione scoperta del cristallo fino a produrvi una luminescenza sufficientemente vivace che veniva osservata al solito modo con un Nicol analizzatore.

dipendenti, per cui, cioè, le varietà di intransitività siano superficie a due dimensioni. Da un teorema dimostrato nel secondo capitolo della mia tesi di laurea (che sarà pubblicata negli Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa) risulta che questo non accade altro che quando il gruppo si può con un movimento ridurre ad operare su due o tre sole variabili. Le varietà di intransitività sono allora piani o sfere dello spazio ordinario.

(1) Rend. Acc. Lincei, XIII (5), pag. 301, 1904.

(2) Roc. Roy. Soc. London, *28*, pag. 477, 1879.

(3) Wied. Ann., 60, pag. 740, 1897.