# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1905 gennaio 3 | $7^h\,34^m$ | $9^s$ | R.C.R. | |
| $\alpha$ apparente cometa | 1 20 | 2. 50 | (9.090) | |
| $\delta$ » | 5°59′ | 9″. 0 | australe (0.811) | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1905 gennaio 5 | $6^h\,3^m$ | $22^s$ | R.C.R. | |
| $\alpha$ apparente cometa | 1 21 | 20. 73 | ($8^n$.652) | |
| $\delta$ » | 5°13′ | 16″. 2 | australe (0.807) | |

**Fisica matematica.** — *Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra.

**Meccanica.** — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione.* Nota di Orazio Tedone, presentata dal Socio V. Volterra.

Le due precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica matematica.** — *Integrazione della $\Delta_4$ fra due piani paralleli.* Nota di Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente G. A. Maggi.

Siano $\sigma_1$ e $\sigma_2$, di rispettive equazioni $z=h$ e $z=-h$, due piani paralleli, e si chiami S lo spazio interposto. Noi determineremo una soluzione, regolare in S, dell' equazione differenziale

$$(1) \qquad \Delta_4\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)=0\,,$$

supponendo noti in ogni punto del contorno $(\sigma_1\,,\sigma_2)$, che, per brevità, indicheremo soltanto con $\sigma$, i valori di F e di $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$.

L'integrazione della (1) conduce subito all'integrazione dell'equazione più generale

$$\Delta_4\,\mathrm{F}(x\,,y\,,z)=\mathrm{Q}(x\,,y\,,z)\,,$$

dove $\mathrm{Q}(x\,,y\,,z)$ rappresenta una funzione nota. Noi supponiamo nei dati tutto ciò che è richiesto per l'esistenza degl'integrali che ci occorreranno, e, inoltre, uno speciale modo di comportarsi all' infinito, che risulterà dalle nostre considerazioni.

Adopereremo un cammino un po' tortuoso, ricorrendo a idee di meccanica, ma ci guideranno criterî così facili a intendersi, che non è forse inopportuno farli conoscere.

Supponiamo che in ogni punto del contorno $\sigma$ sia valida l' equazione

$$f = \mathrm{F}\,,$$

e determiniamo, risolvendo agevolmente un problema di Dirichlet, la funzione $f$, soluzione regolare in S della $\Delta_2 f = 0$, con questi dati superficiali.

Dopo ciò poniamo che in ogni punto di $\sigma$ valga l' equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{F} - f)\,.$$

Il secondo membro è noto, e, risolvendo lo stesso problema, noi determiniamo la funzione $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, soluzione regolare in S della $\Delta_2 = 0$. Integrando due volte rispetto a $z$, e osservando che le costanti additive di queste integrazioni debbono essere nulle, come per i punti all' infinito di S, così per ogni altro punto, noi determiniamo subito la funzione $\varphi$, soluzione regolare in S della $\Delta_2 = 0$.

Se ora noi poniamo, nei punti di $\sigma$,

$$\mathrm{L} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \qquad \mathrm{M} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,,$$

$$\mathrm{N} = 0\,,$$

risultano abbastanza evidenti le formule

$$\int \mathrm{L}\, d\sigma = 0\,, \qquad \int \mathrm{M}\, d\sigma = 0\,,$$

$$\int (y\mathrm{L} - x\mathrm{M})\, d\sigma = 0\,.$$

Basta decomporre opportunamente i primi due integrali, fatti in $d\sigma = dx\, dy$ ed estesi a tutto il contorno $\sigma$, e adoperare una nota trasformazione. Il terzo, analogamente definito, si scinde come risulta dalle due formule

$$\int y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\sigma = \int \frac{\partial}{\partial x}(y\varphi)\, d\sigma\,, \qquad \int x \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, d\sigma = \int \frac{\partial}{\partial y}(x\varphi)\, d\sigma\,,$$

ed anche qui vale analoga decomposizione in parti tutte nulle.

Ciò mostra che, se i valori superficiali, assegnati per L, M, N, rappresentassero i valori di tre componenti di tensione, secondo $x, y, z$, applicate al contorno di un corpo *rigido* occupante S, queste forze si farebbero equilibrio.

Se invece occupa S un solido omogeneo, elastico, isotropo, l'azione di queste forze unitarie sposterà le molecole del corpo, ma noi vogliamo ammettere, come hanno fatto finora tutti quelli che hanno studiato tali questioni, che un adeguato sistema $u, v, w$ di spostamenti secondo i tre assi $x, y, z$, condurrà il corpo in equilibrio. Se $\lambda$ e $\mu$ denotano le costanti elastiche del corpo isotropo, che non riteniamo soggetto a forze di massa, valgono le equazioni indefinite

$$N = -\lambda\Theta - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu\Delta_2 w = 0. \qquad \left(\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Queste mostrano la validità della formula

$$\Delta_2 N = 2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}.$$

Ma è noto che nei punti della superficie vale l'equazione

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Se ne ricava, per le precedenti relazioni,

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(F - f).$$

o anche, sempre per i punti della superficie,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial(N+f)}{\partial z},$$

Ma, in superficie, vale anche la relazione

$$F = N + f,$$

dunque, se non fosse in ogni punto di S

$$F(x, y, z) = N(x, y, z) + f(x, y, z), \tag{2}$$

la $\Delta_4 = 0$ avrebbe, coi nostri dati, più d'una soluzione. Ma è noto che ciò non può essere, dunque la formula (2) risolve il nostro problema, se noi possiamo determinare $N(x, y, z)$. Ma la formula del Betti

$$4\pi(\lambda+2\mu)\Theta = -\int\left[L\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\xi\right)+M\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\eta\right)\right]d\sigma,$$

dove $r, \xi, \eta$ hanno significazioni ben note, fa conoscere $\Theta$ in un punto generico di S; e, dopo ciò il $\Delta_2 N$ dianzi calcolato in funzione di $\Theta$, può ritenersi come noto, perciò troviamo subito, in un punto generico di S,

$$N = -\frac{\lambda+\mu}{2\pi}\int\left(\frac{1}{r}-G_1\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}dS,$$

dove $G_1$ denota la funzione di Green. Le grandezze $\xi$ ed $\eta$ sono le componenti, secondo $x$ e $y$, dello spostamento nella *deformazione ausiliare*. Non è difficile dare le espressioni di $\xi, \eta$, in funzione dei dati: ciò si può fare con varî metodi, ormai noti.

Faremo ancora una breve osservazione. Noi abbiamo ammesso, senza dimostrazione, il cosiddetto *teorema d'esistenza*, relativo a un sistema di forze superficiali, vincolate dalla condizione che esse manterrebbero il corpo in equilibrio, se fosse rigido. Non è improbabile che alcune ricerche recentissime (e specialmente quelle sull'inversione degl'integrali definiti) possano avviare gli studiosi alla dimostrazione di questo teorema per forme di corpi molto meno semplici e molto più generiche di quella che ora consideriamo. Per ora possiamo dire che questa proposizione ha la stessa evidenza di tante altre che concordemente i fisici ritengono come *certe*; ma bisogna aggiungere che il rigore analitico richiede che i risultati, ottenuti col nostro presente metodo, debbano essere, volta per volta, soggetti a prova; e non è infondato il dubbio che le difficoltà d'integrazione possano, in alcuni casi, rendere queste prove impraticabili. Sebbene queste idee contrarie siano di natura ben grave, tuttavia credo che non siano poche le occasioni nelle quali il metodo sia abbastanza facilmente ed utilmente applicabile.

**Fisica matematica.** — *Sopra un' applicazione del metodo di Riemann alla integrazione delle equazioni differenziali della teoria degli elettroni.* Nota del dott. MAX ABRAHAM, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le equazioni indefinite della teoria degli elettroni si possono ricondurre, come è noto, a equazioni differenziali alle derivate parziali della forma

$$(1) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\varrho.$$