ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1905.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie deformate per flessione dell'iperboloide rotondo ad una falda.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. È noto come partendo dai teoremi fondamentali sulla deformazione delle quadriche rotonde, dati da Guichard nel 1899, si è andata recentemente sviluppando una *teoria delle trasformazioni* per le superficie applicabili su queste quadriche. Ma la teoria svolta fin qui, quando si voglia restare nel campo reale, si applicava soltanto all'ellissoide allungato ed all'iperboloide rotondo a due falde, per il legame che i teoremi di Guichard stabiliscono fra le deformazioni di queste quadriche e quella della sfera. Per le altre due forme di quadriche rotonde: l'ellissoide schiacciato e l'iperboloide ad una falda, mancava finora una teoria analoga.

Qui mi propongo di dar notizia di alcune mie nuove ricerche le quali permettono di costruire, per le superficie applicabili sull'iperboloide rigato rotondo, una teoria delle trasformazioni affatto analoga a quella delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche. L'una e l'altra teoria si fondano invero, come si vedrà, sulla medesima circostanza geometrica e cioè sulla esistenza di congruenze rettilinee W [1]. le cui due falde focali

[1] Col nome di *congruenze* W si indicano le congruenze rettilinee sulle cui due falde focali si corrispondono le linee assintotiche.

sono applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima superficie di rotazione. In certo modo la teoria delle trasformazioni si presenta così più semplice per l'iperboloide rigato rotondo che non per le altre due forme quadriche di rotazione prima considerate.

La proposizione fondamentale della nuova teoria si ha nel seguente:

TEOREMA I. *Ogni superficie Σ applicabile sull'iperboloide rotondo rigato appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze rettilinee* W, *la cui seconda falda focale è applicabile sul medesimo iperboloide.*

Nota che sia una deformata Σ dell'iperboloide, nelle seconde falde focali di ciascuna delle indicate congruenze si hanno ∞^2 nuove deformate Σ_1 dell'iperboloide stesso: il passaggio da Σ a Σ_1 costituisce una delle nostre trasformazioni.

La determinazione delle ∞^2 trasformate Σ_1 di una data superficie Σ applicabile sull'iperboloide, dipende dall'integrazione di un sistema lineare di equazioni ai differenziali totali che qui non occorre specificare più da vicino.

Osserverò ancora di passaggio che, oltre le deformate dell'iperboloide rigato rotondo, godono della proprietà stessa, espressa dal teorema I, varie altre classi di superficie applicabili sopra superficie di rotazione, e precisamente quelle applicabili sui tipi seguenti: 1° la pseudosfera ordinaria, 2° la pseudosfera accorciata od allungata, 3° il catenoide ordinario, 4° il catenoide accorciato od allungato, 5° il sinusoide iperbolico. Ed anzi non è escluso che il teorema I valga anche per altre classi di superficie applicabili sopra superficie di rotazione, per le quali si potrà allora costruire una corrispondente teoria delle trasformazioni.

2. Ritornando alle deformazioni dell'iperboloide, indico qui la via indiretta per la quale sono dapprima pervenuto alla proposizione fondamentale enunciata.

Essendo

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

l'equazione dell'iperbola meridiana, il quadrato dell'elemento lineare dell'iperboloide, generato dal rotare di questa iperbola attorno all'asse delle z (asse immaginario), è dato da:

$$ds = \frac{(a^2 + b^2)\, r^2 - a^4}{a^2(r^2 - a^2)}\, dr^2 + r^2\, dv^2$$

e per la curvatura K della quadrica si ha quindi

$$K = -\frac{a^4\, b^2}{\{(a^2 + b^2)\, r^2 - a^4\}^2}\,.$$

Si consideri ora una qualunque superficie Σ applicabile su questo iperboloide, e siano α, β i parametri delle linee assintotiche sopra Σ. Dalle formole di Lelieuvre e dalla teoria delle deformazioni infinitesime risulta che, se si pone:

$$(1)\quad \begin{gathered} \xi_1 = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)r^2-a^4}}{ab}\cdot \mathrm{X}\ , \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)r^2-a^4}}{ab}\cdot \mathrm{Y}\ , \\ \xi_3 = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)r^2-a^4}}{ab}\cdot \mathrm{Z}\ , \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot\sqrt{r^2-a^2}\ , \end{gathered}$$

dove $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ denotano i coseni di direzione della normale a Σ, queste quattro funzioni ξ di α, β sono soluzioni di una medesima equazione di Moutard

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \mathrm{M}\xi$$

essendo M una conveniente funzione di α, β.

Ora le quattro ξ sono visibilmente legate dalla relazione quadratica

$$(3)\qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2 = 1\ ;$$

ci troviamo così nel campo delle equazioni di Moutard dotate di un *gruppo di quattro soluzioni quadratiche.* Della teoria generale delle trasformazioni (ortogonali) di queste equazioni mi sono già occupato l'anno scorso in questi Rendiconti [1], e più diffusamente in una Memoria ora stampata negli Atti della Società dei XL [2].

Le particolari equazioni di Moutard che ammettono gruppi di quattro soluzioni legate dalla relazione (3) si presentano, come ivi ho dimostrato, nella teoria delle *superficie di Voss* dello spazio iperbolico, di quelle superficie cioè, immerse nello spazio di curvatura costante negativa, sulle quali esiste un doppio sistema coniugato di linee geodetiche. La teoria delle trasformazioni per queste superficie che ho svolto alla fine della Memoria ora citata si traduce appunto, mediante le osservazioni superiori, nella teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sull'iperboloide rigato di cui ci stiamo occupando.

3. La trasformazione colla quale si passa, secondo il teorema I, da una deformata nota Σ dell'iperboloide ad una nuova Σ_1 dipende da due costanti arbitrarie. Una di queste dà il valore dell'angolo costante che nello spazio

[1] *Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche,* volume XIII, fasc. 6, settembre 1904.

[2] *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni,* Atti, serie 3ª, t. XIII (1905)

iperbolico forma ogni coppia di piani tangenti in punti corrispondenti delle due superficie di Voss che corrispondono a Σ, Σ_1. Indicheremo questa costante con σ e la trasformazione stessa col nome di *trasformazione* B_σ. Dopociò possiamo enunciare per le attuali trasformazioni un secondo teorema che corrisponde perfettamente al *teorema di permutabilità* per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche:

TEOREMA II. *Se ad una superficie Σ, applicabile sull'iperboloide rigato rotondo, sono contigue due superficie Σ_1, Σ_2 della medesima specie per mezzo di due trasformazioni* $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$, *a costanti σ_1, σ_2 differenti, esiste una quarta superficie Σ_3, applicabile sopra $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$, e contigua, come Σ, alle due Σ_1, Σ_2 per mezzo di due trasformazioni* $B'_{\sigma_2}, B'_{\sigma_1}$, *colle medesime costanti σ_2, σ_1 invertite.*

Quando le tre superficie $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ siano note, la quarta Σ_3 se ne deduce in termini finiti, senza alcun calcolo d'integrazione.

Dal teorema di permutabilità si traggono ora le stesse conseguenze come negli altri casi analoghi, in particolare questa principale, che: *Nell'applicazione successiva ed illimitata delle trasformazioni per le deformate dell'iperboloide basta avere integrato una prima volta il sistema delle equazioni differenziali per la trasformazione della superficie primitiva Σ nelle contigue, dopo di che saranno senz'altro integrati i sistemi analoghi per tutte le nuove superficie derivate.*

4. In altro modo arriviamo ai risultati enunciati collegandoli alle trasformazioni di Bäcklund di una certa classe di superficie pseudosferiche *immaginarie.*

Essendo, come sopra al n. 2, Σ una qualunque superficie applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda, si consideri il sistema ∞^2 di sfere coi centri nei punti di Σ e col raggio R dato dalla formola

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{r^2-a^2}\,.$$

L'inviluppo di questo sistema ∞^2 di sfere *reali* consta di due falde S, S_3 che sono superficie *immaginarie coniugate* e di curvatura costante negativa

$$K = -\frac{1}{b^2}\,.$$

Prendasi ora la superficie $\overline{\Sigma}$ complementare di Σ rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani dell'iperboloide. Questa $\overline{\Sigma}$ è alla sua volta applicabile sull'iperboloide stesso e forma con Σ la superficie focale completa di una particolare congruenza W (normale) appartenente alla specie considerata nel teorema I.

Il sistema ∞^2 di sfere descritte attorno ai punti di Σ come centri, e colla legge stessa assegnata sopra per Σ, ha per falde dell'inviluppo due nuove superficie immaginarie coniugate S_1, S_2 colla curvatura costante $K = -\frac{1}{b^2}$. Queste superficie pseudosferiche S_1, S_2 sono legate tanto alla S che alla S_3 da una trasformazione di Bäcklund, secondo il teorema di permutabilità [1]. Quattro punti M, M_1, M_2, M_3 corrispondenti delle quattro superficie segnano i vertici di un quadrilatero sghembo, i cui lati hanno la lunghezza costante puramente immaginaria $a\sqrt{-1}$, e l'angolo θ che formano i piani $M M_1 M_2$, $M_3 M_1 M_2$ tangenti a S, S_3 con quelli $M_1 M M_3$, $M_2 M M_3$ tangenti a S_1, S_2 è pure una costante puramente immaginaria, il cui coseno è eguale a $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$.

Come si vede, la teoria della deformazione dell'iperboloide rotondo ad una falda viene così a dipendere da quella di una *certa classe* di superficie pseudosferiche immaginarie. Si può dire che la difficoltà della ricerca si riduce a caratterizzare queste speciali superficie pseudosferiche immaginarie ed a presentare quindi, sotto forma definitiva reale, le formole finali per le trasformazioni.

Questo sarà l'oggetto di un più ampio lavoro, ove la teoria qui appena accennata riceverà un adeguato sviluppo.

Matematica. — *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Nota del Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Quando si tenta di estendere alle superficie algebriche i risultati ottenuti, nella teoria delle curve, da Riemann, Clebsch, Brill e Nöther, si incontrano, accanto ad affinità previste, singolari anomalie. Il Cayley, per primo (1871), ne segnalò una. Si parta da una superficie f d'ordine n, dotata di una curva doppia con un numero finito di punti tripli, che siano pure tripli per la superficie. E si voglia il numero p_g delle superficie (*aggiunte*) indipendenti d'ordine $n-4$, che passano semplicemente per la detta curva; p_g è (come fu osservato da Clebsch e Nöther) un invariante della superficie f, il *genere geometrico*. Ora, se, per calcolare p_g, si applicasse alla ipotesi $\nu = n-4$ quella formola, che dà il numero delle superficie indipendenti, di ordine ν *abbastanza elevato*, passanti per la curva nominata, si troverebbe, in certi casi, un risultato p_a inferiore al valore esatto p_g. Questa discordanza, che non si presenta mai nel problema analogo ($\nu = n-3$)

[1] *Lezioni*, vol. II, pag. 411 seg.