ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1905.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Nota del Corrispondente G. Castelnuovo.

7. Una varietà algebrica, a p dimensioni,

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) = 0, \tag{4}$$

la quale ammetta un gruppo ∞^p, G_p, di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due, può presentare certe particolarità notevoli, che è opportuno esaminare, prima di riprendere la questione che ci ha condotto ad introdurre quella varietà. In questa seconda Nota [1] noi faremo dunque astrazione dalla superficie f, da cui siamo partiti; e della V_p, rappresentata dalla (4), ci basterà ricordare che, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, essa possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie

$$u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots, u_p(\xi),$$

l'inversione dei quali permette di esprimere le ξ mediante funzioni (abeliane) uniformi delle u_i (n. 5). Ricordiamo inoltre che ogni trasformazione del gruppo G_p è rappresentata dalle congruenze (8) del n. 6, che ora scriveremo sotto la forma

$$u_i(\xi') \equiv u_i(\xi) + h_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots p) \tag{8'}$$

dove le h_i sono costanti, e le ξ, ξ' sono coordinate di due punti corrispondenti.

[1] V. la prima Nota a pag. 545 di questi Rendiconti.

Supponiamo ora che il punto ξ della V_p vari sopra una curva, o superficie, ..., o varietà algebrica a $d < p$ dimensioni, W_d, contenuta nella V_p. Allora $u_i(\xi)$ ci fornirà un integrale semplice di prima specie della W_d. Attribuendo ad i i valori $1, 2, \ldots, p$, otterremo così, in generale, p integrali distinti di W_d. Ma può succedere, per una particolarità di W_d e (come vedremo) di V_p, che alcuni di quei p integrali conservino valori costanti, mentre il punto ξ descrive W_d, oppure che, tra i p integrali $u_i(\xi)$ considerati sopra W_d, passino delle identità lineari a coefficienti costanti. Le due ultime ipotesi non sono però distinte, giacchè la seconda si riduce alla prima, pur di sostituire, come è lecito, agli integrali $u_i(\xi)$, convenienti combinazioni lineari di quelli. Possiamo dunque supporre, senza restrizioni, nelle dette ipotesi, che, quando il punto ξ percorre la varietà W_d, le funzioni

$$(9) \qquad u_1(\xi)\ ,\ u_2(u), \ldots, u_q(\xi) \quad , \quad (q < p)$$

forniscano q integrali distinti di W_d, mentre

$$(10) \qquad u_{q+1}(\xi), u_{q+2}(\xi), \ldots, u_p(\xi)$$

conservino valori costanti su W_d:

$$(11) \qquad u_{q+1}(\xi) \equiv k_{q+1}, \ldots, u_p(\xi) \equiv k_p.$$

Poichè i punti di W_d soddisfanno colle loro coordinate alle (11), sarà intanto $d \leqq q$. Ora io dico che « nelle ipotesi in cui ci troviamo, la W_d è contenuta in una varietà algebrica a q dimensioni, V_q, appartenente a V_p, e dotata di un gruppo transitivo ∞^q di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due ».

Applichiamo infatti alla W_d tutte quelle trasformazioni del gruppo G_p, che mutano *un* punto di W_d in *un* punto di W_d; per ogni scelta di due punti corrispondenti su W_d, si avrà una di queste trasformazioni, sicchè le dette trasformazioni saranno al più ∞^{2d}. Ognuna di esse sarà rappresentata da relazioni del tipo (8′), dove però, tenuto conto delle (11), si dovrà porre:

$$h_{q+1} = \cdots = h_p = 0\ ;$$

scriveremo dunque quelle relazioni così:

$$(8'') \qquad u_i(\xi') - u_i(\xi) \equiv \begin{cases} h_i & (i = 1, 2, \ldots, q) \\ 0 & (i = q+1, \ldots, p). \end{cases}$$

Ora qui si possono presentare due casi:

1) O la W_d è mutata in sè stessa da tutte le trasformazioni nominate; queste formano dunque un sottogruppo ∞^d del gruppo G_p. La W_d ha, salvo la dimensione, le stesse proprietà della V_p, e possiede quindi d integrali semplici, distinti, di prima specie. Ricordando le ipotesi (9), si con-

clude che $d = q$. In questo caso, la nostra affermazione è senz'altro giustificata.

2) Oppure la W_d è mutata da quelle trasformazioni in infinite varietà algebriche della stessa dimensione, le quali tutte segano la W_d in un punto almeno, e formano con questa una varietà algebrica, a $d_1 > d$ dimensioni, W_{d_1}, contenuta in V_p. Qui si noti che tutti punti della W_{d_1} soddisfanno, colle loro coordinate, alle (11), in virtù delle (8″). Ne viene che la dimensione d_1 non può superare q: sicchè $d < d_1 \leqq q$. Si applichi ora a W_{d_1} il ragionamento fatto per W_d. Si vedrà che: o la W_{d_1} è mutata in sè da ∞^{d_1} trasformazioni costituenti un sottogruppo di G_p, ed allora è $d_1 = q$, ed il lemma è dimostrato; oppure W_{d_1} è contenuta in una varietà algebrica a d_2 dimensioni, dove $d_1 < d_2 \leqq q$.

È chiaro che, ripetendo un numero finito di volte questo procedimento, si giunge a costruire una varietà algebrica V_q contenente W_d, contenuta in V_p, e dotata di un gruppo ∞^q, G_q, di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due. Per ogni punto di V_q sono verificate le (11), mentre le funzioni (9) forniscono q integrali semplici, distinti, di prima specie, che la V_q possiede.

8. Il gruppo G_q è un sottogruppo *algebrico* del gruppo G_p; anzi la particolarità, che stiamo esaminando, della V_p consiste appunto in ciò, che il gruppo G_p possiede un sottogruppo algebrico.

Ogni punto di V_p, mediante le trasformazioni di G_q, si muta nei punti di una V_q, birazionalmente identica a quella sopra considerata. Di queste V_q ne esistono ∞^{p-q} entro V_p; esse formano un tal sistema, che per ogni punto di V_p ne passa *una*. Ognuna di esse è rappresentata da congruenze del tipo (11), ove le costanti k_i siano scelte convenientemente. Le (9) forniscono poi q integrali semplici, distinti, di prima specie, di ciascuna V_q.

Il gruppo G_p opera *imprimitivamente* sul sistema delle V_q; vale a dire: una trasformazione di G_p o muta ogni V_q in sè stessa (nel qual caso la trasformazione appartiene a G_q), o scambia le V_q tra loro. Il sistema delle ∞^{p-q} V_q, ove si consideri ciascuna V_q come elemento, può dunque riguardarsi come una varietà algebrica, a $p - q$ dimensioni, trasformata in sè da un gruppo di ∞^{p-q} trasformazioni birazionali, permutabili a due a due. Questa varietà possiede dunque $p - q$ integrali semplici, distinti, di prima specie, precisamente gli integrali (10), dove ξ è un punto comunque scelto entro la V_q — *elemento* che si considera.

9. Riprendiamo la varietà V_p, che stiamo esaminando. Essa possiede, come si disse, un sistema di ∞^{p-q} varietà algebriche V_q, di cui ciascuna è trasformata in sè da un sottogruppo G_q di G_p. Ora vedremo che la V_p possiede un secondo sistema costituito da ∞^q varietà algebriche V_{p-q}, le quali sono tutte trasformate in sè da un secondo sottogruppo algebrico G_{p-q} di G_p.

La proprietà enunciata è implicitamente contenuta in un noto teorema dei sigg. Picard e Poincaré sugli integrali riducibili [1]. Ma le considerazioni precedenti ci conducono in modo semplice a ritrovare il teorema stesso, ed a costruire algebricamente il sistema delle V_{p-q}.

1) Si supponga anzitutto che nella V_p esista una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, W_{p-q}, la quale seghi in un sol punto ciascuna delle V_q. Poichè questa W_{p-q} è in corrispondenza birazionale col sistema ∞^{p-q} delle V_q, essa possederà gli stessi $p-q$ integrali di prima specie (10), che spettano a quel sistema. Allora noi possiamo applicare alla W_{p-q} il lemma del n. 7, il quale ci dice che la W_{p-q} è contenuta in una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, V_{p-q}, che è trasformata in sè da un sottogruppo algebrico G_{p-q} del gruppo G_p. Nel caso presente dunque la W_{p-q} stessa è una delle V_{p-q} che andavamo cercando, mentre le altre V_{p-q} si ottengono applicando le trasformazioni di G_{p-q} ai singoli punti di V_p.

2) In generale però, o non esisterà, o non si conoscerà una W_{p-q} secante in un sol punto ciascuna V_q. Ma si potrà sempre costruire in V_p una W_{p-q} algebrica, secante in un numero finito di punti, ad es. in n punti, ogni V_q. Il gruppo delle n intersezioni determina, in ogni V_q, una involuzione g_n^{n-1} (n. 6); questa avrà un certo numero $\nu(=n^{2q})$ di punti n^{upli}, costituenti un gruppo Γ_ν. I gruppi Γ_ν, che così si ottengono nelle ∞^{p-q} V_q, formano una varietà algebrica a $p-q$ dimensioni, V_{p-q}. Ora io dico che questa V_{p-q} è trasformata in sè da un sottogruppo G_{p-q} di G_p.

Giova notare, a tal fine, che, prendendo in tutti i modi possibili n punti in una V_q, si ottengono in questa ∞^q involuzioni g_n^{n-1}, ciascuna delle quali possiede un gruppo Γ_ν di ν punti n^{upli}. Variando poi la V_q nel sistema ∞^{p-q} cui appartiene, si avranno in tutto ∞^p g_n^{n-1} ed altrettanti gruppi Γ_ν. Ora ogni trasformazione di G_p muta una di queste g_n^{n-1} in un'altra g_n^{n-1}, ed il gruppo Γ_ν della prima nel gruppo Γ_ν della seconda. In breve, G_p opera sugli ∞^p gruppi di punti Γ_ν, come sui singoli punti di V_p; salvo che, mentre esiste una sola trasformazione di G_p che muta un punto in sè stesso, esistono invece ν trasformazioni che mutano un Γ_ν in sè stesso.

Possiamo esprimere questo fatto così. Immaginiamo una nuova varietà algebrica V'_p, i cui punti siano in corrispondenza birazionale coi gruppi Γ_ν di V_p; sicchè tra V_p e V'_p passi una corrispondenza $(\nu, 1)$. Ogni trasformazione T di G_p, operante su V_p, ha per corrispondente una trasformazione birazionale T′ di V'_p in sè stessa; ma la stessa trasformazione T′ di V'_p proviene da ν trasformazioni diverse T di V_p. Le dette trasformazioni T′

[1] Si veda, ad es., la Memoria del sig. Poincaré dell'American Journal, Bd. 8. In quel teorema si suole parlare di integrali *abeliani* riducibili (cioè relativi ad una curva); ma la dimostrazione si estende anche al caso che stiamo trattando. Cfr. anche una Nota del sig. Painlevé nei Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences, Paris, 30 marzo 1896.

costituiscono anch'esse un gruppo a p parametri, G'_p, il quale si trova in isomorfismo meriedrico col gruppo primitivo G_p. Al sottogruppo G_q di G_p corrisponde un sottogruppo G'_q di G'_p; le trasformazioni di G'_q, applicate ai singoli punti della V'_p, generano, in essa, un sistema ∞^{p-q} di V'_q, le quali corrispondono, nella corrispondenza $(\nu, 1)$, alle ∞^{p-q} V_q di V_p.

Riprendiamo ora la V_{p-q} che avevamo costruito in V_p, e che ne segava ogni V_q in un gruppo di ν punti, Γ_ν. A questa V_{p-q} corrisponderà in V'_p una V'_{p-q}, che segherà *in un solo punto* ogni V'_q. Possiamo dunque applicare a V'_p il ragionamento applicato a V_p nella ipotesi 1). Ricaviamo così che il gruppo G'_p possiede un sottogruppo algebrico G'_{p-q}, il quale trasforma la V'_{p-q} in sè stessa. Ritornando ora alla varietà V_p ed al relativo gruppo G_p, concludiamo che anche G_p possiede un sottogruppo algebrico G_{p-q}, il quale trasforma in sè stessa la V_{p-q} sopra costruita. La stessa conclusione vale per ciascuna delle parti irriducibili componenti V_{p-q}, nella ipotesi che essa si spezzi in parti. Anzi, in questa ipotesi, conviene indicare con V_{p-q} una di quelle parti irriducibili, e con G_{p-q} il relativo gruppo di trasformazioni. Le trasformazioni di G_{p-q}, applicate ai singoli punti di V_p, forniranno poi ∞^q varietà V_{p-q}, tutte birazionalmente identiche, formanti il secondo sistema di imprimitività di V_p.

Siamo ora in grado di raccogliere, in un solo enunciato, i risultati ottenuti in questa seconda Nota:

Entro ad una varietà algebrica V_p, *la quale ammetta un gruppo permutabile* G_p *di trasformazioni birazionali in sè stessa, esista una varietà algebrica* W, *sopra cui i* p *integrali semplici di prima specie, appartenenti alla* V_p, *forniscano solo* $q < p$ *integrali distinti di* W. *Allora nella* V_p *esistono due sistemi algebrici di imprimitività, uno composto di* ∞^{p-q} V_q, *l'altro di* ∞^q V_{p-q}, *sistemi tali, che per un punto generico di* V_p *passa una* V_q *ed una* V_{p-q}, *mentre una* V_q *ed una* V_{p-q} *si segano in un numero finito di punti. Nel tempo stesso, il gruppo* G_p *possiede due sottogruppi algebrici,* G_q, G_{p-q}, *il primo dei quali trasforma ciascuna* V_q *in sè stessa e scambia tra loro le* V_{p-q}, *mentre il secondo trasforma in sè le* V_{p-q} *e scambia tra loro le* V_q. *Si aggiunga che la* W, *di cui parla la ipotesi, è contenuta entro una delle* V_q.

Viceversa, se la V_p possiede le particolarità indicate nella tesi, ogni varietà algebrica W, contenuta in una V_q, si trova nelle condizioni previste dalla ipotesi.

Aggiungerò, sebbene ciò non sia essenziale per il seguito, che, se la V_p si trova nel caso 1) (cioè se $\nu = 1$), si può fissare un sistema di p integrali semplici distinti, di prima specie, della V_p, il quale sia formato da q integrali con $2q$ periodi (relativi ad una V_q), e da $p - q$ integrali con $2(p - q)$ periodi (relativi ad una V_{p-q}). Se invece la V_p si trova nel caso 2) $(\nu > 1)$, la detta scelta di integrali si può fare per la V'_p. Ritornando alla

V_p, si può affermare soltanto che, tra gl' integrali semplici di prima specie di V_p, si possono trovare q integrali distinti, *riducibili* ad integrali con $2q$ periodi, ed altri $p-q$ integrali, distinti tra loro e da quelli, che sono riducibili ad integrali con $2(p-q)$ periodi [1].

Matematica. — *Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *I proietti di Leucotefrite nei Campi Flegrei.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

La presenza di rocce leucitiche nella regione vulcanica dei Campi Flegrei a ponente di Napoli è stata accennata assai raramente, quantunque tali rocce sieno così abbondanti al Somma e componenti esclusive al Vesuvio.

Lo Scacchi ne indicò a S. Maria del Pianto e nel Monte di Procida, cioè nei due estremi opposti della regione Flegrea; il Roth ne trovò nel tufo giallo al Vomero e rispettivamente alla Torre Lupara presso Astroni; il Lacroix in un frammento con le pomici e in un proiettile a Humboldtilite nel Colle dell' Imperatrice pure agli Astroni.

Quale componente molto accessorio è indicata la Leucite da Riva e De Lorenzo nella trachite augitica sia olocristallina, sia ipocristallina degli Astroni.

In realtà solo a nord dell'Averno, nel fondo Maglioni, sulla via di Cuma, in mezzo al tufo pomiceo, e con trachite augitica olocristallina, a due o tre riprese, trovasi una certa quantità di massi grandi al più circa 1 mc., di Leucotefrite, trovata ed accennata primieramente da Abich, Hoffmann, Humboldt, non rivista da Rath e Guiscardi, nuovamente descritta da Kalkowski, poi anche ritrovata da De Lorenzo e da me. Altrove le rocce leucitiche sono soltanto in frammenti sporadici e rari, in proietti o talora in ghiaie; ma

[1] L'aggettivo *riducibile* va inteso nel senso convenuto nella teoria degli integrali abeliani; esso esprime che, ad es., i $2pq$ periodi dei q integrali nominati di V_p sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei $2q^2$ periodi relativi ai q integrali corrispondenti di V'_p; quei coefficienti non variano al variare dell'integrale che si considera tra i q di V_p, ma varia al variare del ciclo, cui si riferiscono i periodi di quell'integrale. Si veda, ad es., la Memoria del Poincaré sopra citata.