

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 giugno 1905.

F. D' OVIDIO, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. Uno dei risultati a cui sono giunto nelle Note precedenti⁽¹⁾ relative all'equilibrio dei solidi elastici più volte connessi è stato il seguente.

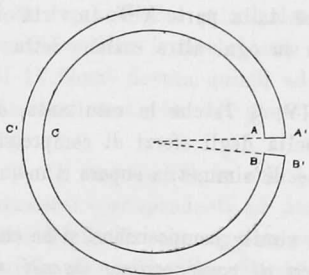


FIG. 1. — Fessura radiale.

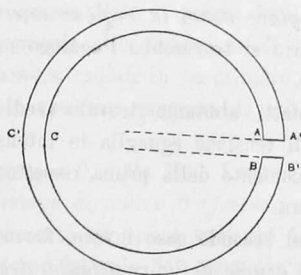


FIG. 2. — Fessura uniforme.

Abbiasi un anello simmetrico rispetto ad un asse (fig. 1). Se ne asporti in $AA' BB'$ una sottile fetta, la cui grossezza varii proporzionalmente alla distanza dall'asse (chiameremo ciò fare una *fessura radiale*), quindi si accostino le faccie AA' e BB' della fessura, si saldino e si lasci libero l'anello.

⁽¹⁾ Sedute del 5 febbraio, 19 febbraio, 2 aprile, 16 aprile 1905.

Le faccie saldate *non sono tese, ma in parte tese ed in parte compresse e la somma delle forze di compressione è eguale alla somma delle forze di tensione* (vedi Nota IV, §§ 1, 7).

Anche se asportiamo in AA' BB' (fig. 2) una sottile fetta a faccie parallele ed equidistanti dall'asse dell'anello (*fessura uniforme*) e saldiamo le faccie, abbandonando a sè il corpo, si ha che *le faccie sono in parte tese ed in parte compresse*. Senonchè le condizioni del corpo in equilibrio nel secondo caso sono essenzialmente diverse che nel primo (Nota IV, § 7).

Nel primo caso lo stato di deformazione del corpo è simmetrico rispetto all'asse, in modo che il medesimo stato si sarebbe ottenuto eseguendo, invece che nella primitiva sezione, in un'altra sezione retta qualunque dell'anello (per esempio in quella diametralmente opposta C' C) (fig. 1) *la stessa fessura radiale* e saldando quindi le faccie. Nel secondo caso per ottenere lo stesso stato di deformazione operando una distorsione, anzichè in AA' BB' (fig. 2), nella regione diametralmente opposta, sarebbe convenuto fare un taglio in C' C e *interporre fra le faccie del taglio una zeppa di grossezza uniforme*, come si rileva dal principio dei tagli equivalenti (vedi Nota II, art. I, § 1).

Inoltre la distribuzione degli sforzi è completamente diversa nei due casi. Nel primo caso, se esaminiamo le azioni che AA' esercita sopra BB', dopo la saldatura, e componiamo fra loro tutti gli sforzi di compressione e quindi componiamo fra loro tutti quelli di tensione, abbiamo che *la linea d'azione della risultante dei primi giace verso la regione interna dell'anello*, cioè dalla parte AB, *la linea d'azione della risultante degli altri sforzi giace verso la regione esterna*, cioè dalla parte A'B'. In virtù della simmetria si troverebbe l'analogo risultato in ogni altra sezione retta dell'anello.

Infatti abbiamo trovato (vedi Nota IV, § 7) che la risultante degli sforzi di tensione eguaglia in intensità quella degli sforzi di compressione, ma il momento della prima rispetto all'asse di simmetria supera il momento dell'altra.

Nel secondo caso invece, facendo una simile composizione, si ha che *la linea d'azione della risultante degli sforzi di compressione agenti sulla faccia BB', dopo la saldatura, giace verso la regione esterna dell'anello*, cioè dalla parte A'B'; mentre *la linea d'azione degli sforzi di tensione giace verso la regione interna*, cioè dalla parte AB. Ma l'opposto si trova se eseguiamo l'analoga ricerca in C' C, vale a dire la linea d'azione della risultante degli sforzi di compressione giace dalla parte interna, ossia verso C e la linea d'azione della risultante delle tensioni è dalla parte opposta, cioè verso C'.

Infatti noi abbiamo dimostrato (Nota IV, § 7) che, nel caso del taglio uniforme, in ogni sezione trasversale dell'anello gli sforzi di tensione supe-

rano quelli di compressione e la risultante degli uni e degli altri incontra ortogonalmente l'asse di simmetria dell'anello.

In altri termini nel primo caso della fessura radiale, le fibre circolari dell'anello stirate sono in prevalenza verso la regione esterna e quelle compresse verso la regione interna e ciò lungo tutto l'anello, mentre, nel caso della fessura uniforme, le fibre circolari dell'anello dalla parte destra di esso (fig. 2) sono in prevalenza stirate nella regione interna e compresse nella regione esterna, ed il contrario avviene dalla parte opposta di sinistra dell'anello.

Questi diversi risultati che abbiamo enunciati si ricavano facilmente, sia dal principio dei tagli equivalenti, sia dalla legge di composizione degli sforzi che abbiamo ottenuto nelle Note precedenti. Colla semplice intuizione male si arriverebbe *a priori* ai risultati stessi, anzi alcuni di essi ci appaiono come inaspettati e la ragione di ciò si comprende, quando si osservi che l'esperienza quotidiana ci abitua in generale ad intuire le deformazioni che un corpo subisce allorchè è sollecitato da sforzi conosciuti. Qui invece nessuno sforzo esterno si esercita sul corpo elastico: gli sforzi che lo sollecitano sono solo interni e, per dir così, nascosti all'osservatore, tanto che essi figurano, al pari della deformazione, come incognite del problema.

2. Ho desiderato avere la conferma sperimentale di alcuni dei risultati ottenuti operando sopra solidi di *caoutchouc* coi quali è facile ottenere deformazioni molto sensibili.

Onde poter fare un confronto fra i risultati del calcolo e le esperienze, ho voluto approfondire principalmente in questa Nota il primo degli esempi svolti nella Nota I, cioè il caso corrispondente alla distorsione di ordine 6 (vedi IV Nota) dovuta quindi ad una fessura radiale in un cilindro cavo di rivoluzione, caso che dal punto di vista analitico presenta le minori difficoltà.

3. Le formule (2), in cui si suppone $\gamma = 0$, della Nota I esprimono gli spostamenti corrispondenti ad una distorsione di ordine 6 (*fessura radiale*) quando il cilindro sia soggetto rispettivamente ad azioni uniformi lungo le superficie cilindriche che formano il contorno laterale del corpo e a tensioni che ne sollecitano le basi. Le prime si eliminano facilmente componendo gli spostamenti (2) della Nota I cogli spostamenti

$$u = \lambda \frac{x}{r^2} + \mu x \quad , \quad v = \lambda \frac{y}{r^2} + \mu y \quad , \quad w = 0,$$

e scegliendo convenientemente le costanti λ e μ .

In tal modo si giunge agli spostamenti

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\alpha \left\{ y \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} x \log r^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{x}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{2} \left[1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right] \right\} \\ v &= -\alpha \left\{ -x \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L+2K} y \log r^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L+K}{L+2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{y}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{2} \left[1 + \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right] \right\} \\ w &= 0 \end{aligned} \right.$$

i quali corrispondono alla ipotesi di una distorsione (d'ordine 6) dovuta ad una fessura radiale la cui apertura angolare è $2\pi\alpha$, mentre il corpo è sollecitato da sole azioni agenti sulle due basi, le quali azioni servono a mantenere le dette basi piane ed alla loro primitiva distanza ⁽¹⁾.

Si possono calcolare facilmente le sei caratteristiche delle tensioni (*strain*) che corrispondono agli spostamenti (I) ed esse risultano:

$$(1) \quad t_{11} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \log r^2 + \frac{2y^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(2) \quad t_{22} = \frac{\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \log r^2 + \frac{2x^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(3) \quad t_{33} = \frac{\alpha L K}{L+2K} \left\{ 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

$$(4) \quad t_{23} = 0$$

$$(5) \quad t_{31} = 0$$

$$(6) \quad t_{12} = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \frac{xy}{r^2} \left\{ 1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} \right\}$$

⁽¹⁾ Si noti che in queste formule, come in tutte le successive i logaritmi sono neperiani.

L'esser nulle t_{23} e t_{31} prova che le forze che si esercitano sulle due basi agiscono normalmente alle basi stesse.

Tale azione sulle basi, assunta come positiva quando è diretta dall'esterno verso l'interno del cilindro, e come negativa quando ha la direzione contraria e riferita alla unità d'area, è espressa da

$$(II) \quad P_{\omega} = t_{33} = \frac{\alpha L K}{L + 2K} \left[1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} \right].$$

Abbiamo dunque il teorema:

Un cilindro cavo di rivoluzione che ha subito una distorsione (distorsione di ordine 6) dovuta ad una fessura radiale di apertura $2\pi\alpha$ conserva le sue basi piane ed alla loro distanza primitiva mediante delle forze normali agenti sulle basi stesse date dalla formula precedente (II), nella quale R_1 e R_2 rappresentano i raggi delle superficie cilindriche laterali e r la distanza dell'asse dai vari punti delle basi.

4. Ciò premesso, calcoliamo le azioni che si esercitano sopra gli elementi della sezione σ del cilindro eseguita con il mezzo piano spiccato dall'asse del cilindro e che forma col piano xz l'angolo β .

Le (1), (2) e (6) ci forniscono subito le componenti secondo gli assi dell'azione unitaria relativa ad ogni elemento della sezione. Esse sono:

$$- F \sin \beta, \quad F \cos \beta, \quad 0$$

in cui

$$F = - \frac{2\alpha(L + K)K}{L + 2K} \left\{ 1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2} \right\}$$

Questo prova che ogni elemento di σ è sollecitato da una forza normale la cui grandezza unitaria è F .

Un calcolo elementare ci dà:

$$\int_{R_2}^{R_1} F dr = 0.$$

Ne segue che, componendo tutte le azioni che si esercitano sugli elementi di σ , si trova una forza risultante nulla.

Questo risultato verifica, nel caso particolare che trattiamo, il teorema generale dimostrato nella Nota precedente (Nota IV, § 6).

Infatti esso prova che la somma delle compressioni che si esercitano sopra σ è eguale, in valore assoluto, alla somma delle tensioni, e tale condizione evidentemente dovrà seguitare a sussistere anche quando non sollecciteremo più le basi del cilindro cavo mediante la forza P_{ω} .

Si può calcolare facilmente il momento rispetto all'asse z delle azioni che sollecitano gli elementi di σ . Esso sarà, denotando con h l'altezza del cilindro:

$$h \int_{R_2}^{R_1} r F dr = - \frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K} \left\{ \frac{R_1^2 - R_2^2}{4} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)^2}{R_1^2 - R_2^2} \right\} h.$$

5. Poniamo:

$$(7) \quad f(r) = 1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

La funzione $f(r)$ è crescente e siccome

$$\int_{R_2}^{R_1} f(r) dr = 0.$$

così risulta che l'equazione

$$f(r) = 0,$$

ha una sola radice ϱ_1 compresa fra R_2 e R_1 , e avremo che $f(r)$ sarà negativo per i valori di r compresi fra R_2 e ϱ_1 e sarà positivo per i valori compresi fra ϱ_1 e R_1 .

Questo prova che le fibre circolari del cilindro aventi per asse l'asse del cilindro e il cui raggio è compreso fra R_2 e ϱ_1 sono compresse, mentre quelle il cui raggio è compreso fra ϱ_1 e R_1 sono stirate. Le fibre neutre hanno il raggio ϱ_1 .

Dall'equazione $f(r) = 0$ si ricava

$$\log \frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{R_1}{R_2} \log \frac{R_1}{R_2} \frac{R_1 R_2}{\varrho_1^2} + \frac{\frac{R_1^2}{R_2^2} \log \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \log \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1} - 1$$

e, posto

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = \varphi,$$

avremo

$$(8) \quad \varphi = \frac{\varepsilon \log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} e^{-2\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1} \log \varepsilon - 1.$$

Sia

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{R_1 - R_2}{R_1};$$

avremo $0 < \gamma < 1$. Nella espressione (8) sviluppiamo in serie per le po-

tenze ascendenti di γ il coefficiente di $e^{-2\varphi}$ e i termini successivi. Otterremo

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \gamma^2 + \dots \right) e^{-2\varphi} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \gamma^2 + \dots \right),$$

da cui segue

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = \frac{1}{12},$$

quindi:

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots,$$

e

$$\frac{\varrho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = e^{\varphi(\gamma)} = 1 + \frac{1}{24} \gamma^2 + \dots,$$

ossia, trascurando le potenze di $\frac{R_1 - R_2}{R_1}$ superiori alla seconda

$$\varrho_1 = \sqrt{R_1 R_2} \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1} \right)^2 \right).$$

Se lo spessore del cilindro cavo sarà piccolo rispetto ai raggi, e il rapporto dello spessore al raggio esterno si considererà come una quantità del primo ordine, avremo che *il raggio delle fibre neutre sarà dato da*

$$\varrho_1 = \sqrt{R_1 R_2}$$

a meno di quantità del secondo ordine.

6. Dalla (7) e dall'equazione

$$0 = 1 + \log \varrho_1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}$$

segue

$$f(r) = \log \frac{r}{\varrho_1} + \frac{R_1^2 R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{r^2 - \varrho_1^2}{r^2 \varrho_1^2} \right).$$

Considerando $\frac{R_1 - R_2}{R_1} = \gamma$ come una quantità piccolissima del primo ordine, con facili calcoli otteniamo, ponendo $r = \varrho_1 + \xi$

$$f(r) = \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right),$$

trascurando quantità del secondo ordine.

Ne segue

$$F = - \frac{2\alpha(L + K)K}{L + 2K} \cdot \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{R_1 - R_2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)} \right).$$

Sia E il modulo di elasticità e η il coefficiente di Poisson. Avremo

$$\frac{(L + K) K}{L + 2K} = - \frac{E}{4(1 - \eta^2)}$$

e, chiamando θ l'apertura angolare del taglio radiale, sarà $\alpha = \frac{\theta}{2\pi}$, quindi

$$(III) \quad F = \frac{E}{2(1 - \eta^2)} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\xi}{\varrho} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{s}{\varrho}\right)$$

in cui ϱ è la media (aritmetica o geometrica dei raggi), e s la differenza dei raggi, ossia lo spessore del cilindro cavo.

7. Passiamo adesso ad esaminare la legge di distribuzione delle forze P_0 sulle basi del cilindro.

Poniamo

$$(9) \quad \psi(r) = 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2};$$

con un calcolo elementare si dimostra che

$$(10) \quad \int_{R_2}^{R_1} r \psi(r) dr = 0,$$

ne segue che l'equazione $\psi(r) = 0$ dovrà avere una radice compresa fra R_2 e R_1 ; e siccome $\psi(r)$ è una funzione crescente, così questa radice sarà unica, onde chiamandola ϱ_2 , avremo che $\psi(r)$ sarà negativa per r compresa fra R_2 e ϱ_2 e positiva per r compresa fra ϱ_2 e R_1 .

È facile mostrare che $\varrho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}$.

Abbiamo infatti

$$(11) \quad 1 + \log \varrho_2^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = 0$$

d'onde

$$\log \frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^2 \log \frac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} + \log \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} + \log 2$$

e posto

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon, \quad \log \frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} = \chi(\varepsilon),$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} - \frac{1}{2} + \log 2.$$

Ne segue

$$\chi'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} - 2 \log \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1)^2} = \frac{\varpi(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1)^2}$$

Scrivendo come precedentemente (§ 5) $\gamma = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$ e sviluppando il logaritmo e quindi $\chi'(\varepsilon)$ in serie di potenze di γ si ha

$$(12) \quad \chi'(\varepsilon) = \frac{\left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \dots\right)(1-\gamma)^3}{\gamma^2(2-\gamma)^2} = \frac{1}{12}\gamma + \dots$$

in cui i termini successivi al primo contengono potenze superiori di γ . Se ne deduce

$$\chi'(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0 \quad \chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0.$$

Ma

$$\varpi'(\varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

onde $\varpi(\varepsilon)$, e per conseguenza $\chi(\varepsilon)$, sono positive per $\varepsilon > 1$. Dunque $\chi(\varepsilon)$ per $\varepsilon > 1$ è una funzione crescente. Ma $\lim_{\varepsilon=1} \chi(\varepsilon) = 0$, dunque

$$\log \frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} > 0,$$

ossia

$$\varrho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Siccome $\chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0$ dalla (12) si ricava

$$\chi(\varepsilon) = \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots$$

e quindi

$$\frac{2\varrho_2}{R_1 + R_2} = e^{\frac{1}{24}\gamma^2 + \dots} = 1 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \dots$$

d'onde

$$\varrho_2 = \frac{R_1 + R_2}{2} \left(1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2\right)$$

trascurando nell'espressione di ϱ_2 le potenze di $\frac{R_1 - R_2}{R_1}$ superiori alla seconda.

Possiamo perciò concludere che *il cerchio il quale separa la regione tesa dalla regione compressa in ciascuna base ha per raggio la media aritmetica dei raggi estremi, a meno di quantità del secondo ordine.*

8. Dalle (9) e (11) segue

$$\psi(r) = 2 \log \frac{r}{\varrho_2}$$

quindi per la (II)

$$P_\omega = \frac{2\alpha LK}{L + 2K} \log \frac{r}{\varrho_2}$$

ed introducendo il modulo di elasticità, il coefficiente di Poisson e l'apertura angolare θ della fessura radiale (cfr. § 6)

$$(II') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \log \frac{r}{\varrho_2}.$$

Dunque per mantenere piane ed alla primitiva distanza le due basi del cilindro bisogna comprimerle nella regione compresa fra i cerchi di raggi R_2 e ϱ_2 e stirarle nella regione compresa fra i cerchi di raggi ϱ_2 e R_1 .

Dalla formula (10) si ricava che, presa una striscia radiale qualunque di una delle basi la somma algebrica di tutte le forze agenti sulla striscia stessa è eguale a zero, ossia la risultante delle tensioni ha la stessa intensità della risultante delle pressioni. L'insieme quindi di tutte le forze agenti nella striscia radiale è equivalente ad una coppia.

Ponendo $r = \varrho_2 + \xi$ avremo $\left| \frac{\xi}{\varrho_2} \right| < 1$, giacchè $\varrho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}$ (vedi

§ 7), quindi sarà possibile sviluppare il $\log \frac{r}{\varrho_2}$ in serie di potenze di $\frac{\xi}{\varrho_2}$ onde la (II') si scriverà

$$P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \left(\frac{\xi}{\varrho_2} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\varrho_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{\varrho_2^3} + \dots \right).$$

Se lo spessore del cilindro è piccolo, trascurando i termini del secondo ordine avremo

$$(II'') \quad P_{\omega} = - \frac{E\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi}{\varrho_2}.$$

9. Supponiamo ora di non sottoporre le due basi del cilindro alle azioni P_{ω} e di lasciarle libere e vediamo quale forma assumerà il cilindro. Cerchiamo cioè la forma che prende il cilindro in virtù della sola distorsione, allorchè nessuna forza esterna lo sollecita.

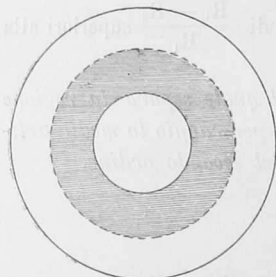


FIG. 3.

A tal fine basterà applicare i principii generali che abbiamo dati nella Nota II, art. I, § 2, cioè converrà sovrapporre alla deformazione (I) quella dovuta alle forze $- P_{\omega}$ agenti sulle basi del cilindro. Ma la deformazione (I) conserva al corpo la forma cilindrica di rivoluzione, basterà quindi esaminare la deformazione di un cilindro soggetto sulle due basi alle azioni $- P_{\omega}$.

La figura 3 rappresenta una delle basi del cilindro.

Il cerchio maggiore e il cerchio minore sono i due orli della base; il cerchio punteggiato è la linea di separazione della regione che deve essere tesa dalle forze $-P_\omega$ (la quale è stata tratteggiata) dalla regione che deve essere compressa dalle forze $-P_\omega$ (la quale è stata lasciata in bianco).

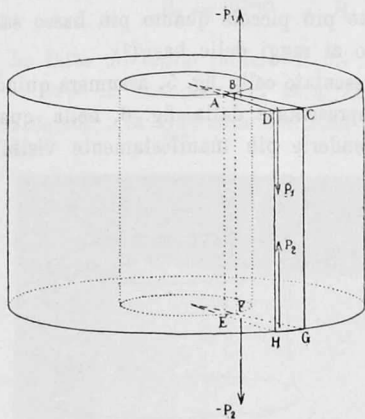


FIG. 4.

Consideriamo ora (fig. 4) una fetta longitudinale ABCDEFGH infinitamente sottile del cilindro cavo, ed immaginiamola staccata dal rimanente del corpo. Secondo ciò che abbiamo trovato nel § 8 la somma delle compressioni agenti sulla base superiore ABCD sarà eguale alla somma delle tensioni e il medesimo avverrà alla base inferiore EFGH, quindi le due basi saranno rispettivamente sollecitate dalle coppie $P_1, -P_1; P_2, -P_2$.

Ne segue che la fetta si fletterà in modo che le generatrici della fascia DCGH si curveranno assumendo una *concavità* e le generatrici della faccia ABFG si curveranno pure, ma divenendo *convesse*. Nello stesso tempo la regione della base superiore ABCD adiacente ad AB si *solleverà* e la regione della base stessa adiacente a CD si *abbasserà*. L'inverso avverrà alla base inferiore.

È facile calcolare dalle formule ordinarie della flessione il sollevamento e l'abbassamento e la freccia di flessione relative alla fetta considerata.

Prendiamo per piano di riferimento il piano normale all'asse condotto per il mezzo dell'asse stesso, avremo:

Sollevamento dei punti della base superiore

$$(13) \quad w' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2h} \cdot \frac{\xi h}{2\rho_2}$$

Abbassamento dei punti della base inferiore

$$(13') \quad w'' = -\frac{1}{E} (-P_\omega) \frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi h}{2\rho_2}$$

Freccia di flessione

$$(14) \quad g = -\frac{P_\omega h^2}{E\xi 8} = \frac{\eta}{1-\eta^2} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{8\rho_2}$$

nelle quali formule h denota l'altezza del cilindro.

Lo stesso avverrebbe per ogni altra striscia longitudinale infinitamente sottile del cilindro se fosse separata dal resto del corpo. Il collegamento

mutuo delle varie striscie altererà i detti sollevamenti ed abbassamenti rimpicciolendoli e specialmente diminuendo la freccia di flessione, ma l'andamento della deformazione rimarrà evidentemente inalterato e le correzioni da farsi nei valori trovati saranno tanto più piccole quanto più basso sarà il cilindro e minore lo spessore rispetto ai raggi delle basi ⁽¹⁾.

Il primitivo cilindro, che si è rappresentato colla fig. 5, assumerà quindi, in virtù della distorsione, la forma rappresentata dalla fig. 6, nella quale si sono esagerate le deformazioni per renderle più manifestamente visibili.

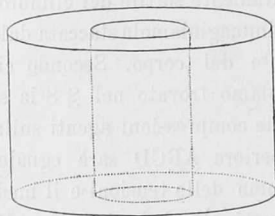


FIG. 5.

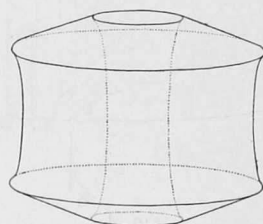


FIG. 6.

Secondo le formule (13), (13'), (14), e prendendo $e_2 = \frac{R_1 + R_2}{2}$, l'altezza totale assunta dopo la distorsione dalla superficie laterale limitante il solido internamente sarebbe

$$h + \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h$$

e l'altezza totale della superficie laterale limitante il solido esternamente sarebbe divenuta

$$h - \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h$$

quindi la differenza d'altezza delle due superficie limiti interna ed esterna sarebbe

$$(15) \quad H = \frac{2\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} h.$$

mentre la freccia di flessione sarebbe

$$(16) \quad g = \frac{\eta}{1 - \eta^2} \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{h^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

⁽¹⁾ Questo risultato, che ci manca qui lo spazio di sviluppare, può raggiungersi con molta facilità ponendo in equazione il problema mediante le equazioni dell'elasticità trasformate in coordinate cilindriche.

10. Ho fatto l'esperienza con un cilindro cavo di *caoutchouc* delle dimensioni seguenti

$$R_1 = 28^{\text{mm}} \quad , \quad R_2 = 12^{\text{mm}} \quad , \quad h = 28^{\text{mm}}$$

e ho fatto un taglio radiale di $68^{\circ}.30'$.

Dopo la distorsione *si manifestarono tutte le particolarità prevedute dal calcolo*; la differenza d'altezza delle superficie limitanti internamente ed

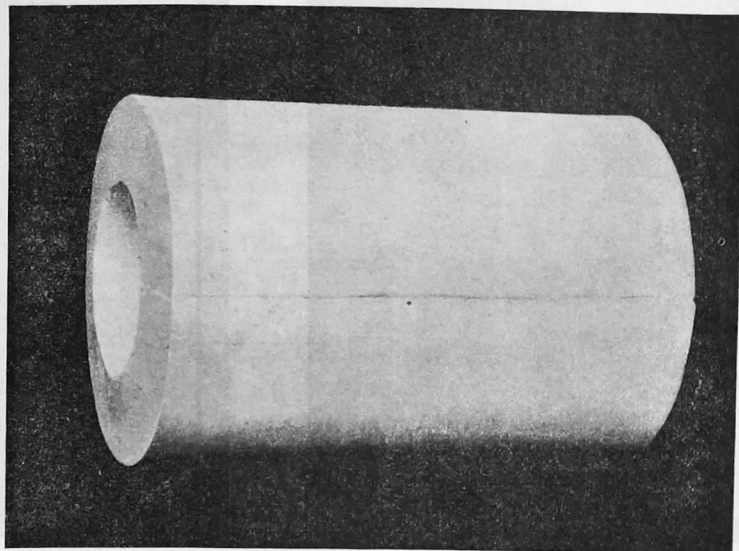


FIG. 7.

esternamente il solido fu misurata e risultò di $2^{\text{mm}},1$ e la freccia di flessione fu pure misurata e risultò di $0^{\text{mm}},35$. Fatto il calcolo mediante le formule (15) e (16) e prendendo $\eta = \frac{1}{2}$ risultò

$$H = \text{differenza d'altezza} = 2^{\text{mm}},6$$

$$g = \text{freccia di flessione} = 0^{\text{mm}},53.$$

L'accordo quindi fra il calcolo e le misure dirette sono molto soddisfacenti.

L'ing. Jona di Milano ebbe la gentilezza di farmi preparare allo stabilimento Pirelli un cilindro cavo di *caoutchouc* delle dimensioni $R_1 = 5^{\text{cm}}$, $R_2 = 2^{\text{cm}},95$, $h = 13^{\text{cm}}$, a cui fece eseguire un taglio radiale dell'ampiezza angolare di 78° . Siccome la saldatura tendeva ad aprirsi, onde fissare la forma del solido deformato, ne feci fare uno stampo in gesso che è riprodotto fotograficamente nella fig. 7.

Questo solido mostra in modo manifesto tutte le particolarità che il calcolo aveva prevedute, cioè l'allungamento interno, il raccorciamento esterno e la flessione laterale, come lo indica la fig. 8, in cui per rendere evidente il fenomeno fu fatta la fotografia del cilindro a cui venne posto

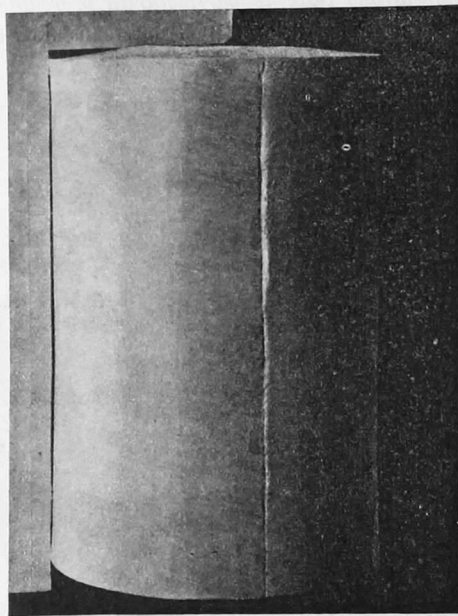


FIG. 8.

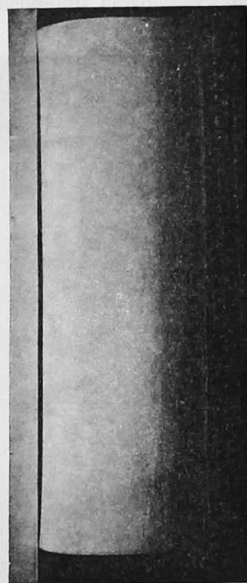


FIG. 9.

accanto a sinistra una squadra. Nelle figure 7 ed 8 si vede benissimo il luogo ove il taglio e la conseguente saldatura furono eseguiti.

La fig. 9 rappresenta la fotografia dello stampo in gesso dell'anima del cilindro. Avendo posto accanto a sinistra un regolo, la curvatura interna risulta chiaramente visibile.

A cagione della grande altezza di questo cilindro per rapporto ai raggi della base le formole (15) e (16) non sono applicabili in questo caso.

Debbo esprimere al prof. Sella ed al dott. Zambiasi dell'Istituto fisico di Roma i più vivi ringraziamenti per le riproduzioni fotografiche e le misure eseguite ed al prof. Pittarelli per i disegni cortesemente fatti.