ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Matematica. — *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare.* Nota del Corrispondente G. CASTELNUOVO.

10. Riprendiamo ora in esame la superficie irregolare [1]

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

ed un sistema algebrico S_p di curve sopra di essa (n. 2), sistema dotato della proprietà, che una sua curva C generica non è equivalente a nessun'altra curva di S_p. Le curve di S_p si possono rappresentare, come fu già detto, sopra i singoli punti della varietà di Picard a p dimensioni

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) = 0, \tag{4}$$

la quale possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie

$$u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots, u_p(\xi). \tag{6}$$

Se il punto ξ descrive una curva algebrica γ entro V_p, gli integrali (6) divengono integrali abeliani, di prima specie, relativi alla curva γ. Ora ai punti di γ corrispondono sulla superficie f le curve di un sistema algebrico ∞^1, che indicherò con S_1. Per ogni punto (x) di f passano certe curve C_1, $C_2, \ldots, C_m$ (dove $m \geqq 1$) di S_1, cui corrispondono i punti $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(m)}$ della curva γ. Formiamo la somma

$$u_i(\xi^{(1)}) + u_i(\xi^{(2)}) + \cdots + u_i(\xi^{(m)}), \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{12}$$

Questa, tenuto conto delle relazioni che passano tra le coordinate (x, y, z) del punto (x) di f, e le ξ, si trasforma in un integrale semplice di 1ª specie della superficie (1)

$$I_i = \int A_i(x, y, z)\,dx + B_i(x, y, z)\,dy,$$

dove A_i, B_i sono funzioni razionali [2].

Attribuendo ad i i valori $1, 2, \ldots p$, abbiamo così p integrali semplici, di prima specie, della superficie f, integrali i cui periodi sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei periodi di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, rispettivamente.

[1] V. le due Note sullo stesso soggetto a pag. 545, 593 di questi Rendiconti.

[2] Questo procedimento, applicato a *tutti* gli integrali abeliani di prima specie della curva γ, permette al sig. Humbert (Mem. citata, Journal de Mathématiques 4e s., t. X) di concludere che una superficie, contenente un sistema come S_1, possiede *almeno* un integrale semplice di prima specie.

Ora, se le (12) forniscono effettivamente p funzioni di x, y, z, che siano linearmente distinte tra loro, noi otteniamo, col procedimento indicato, un sistema di p integrali semplici, linearmente distinti, della superficie $f=0$, e giungiamo senz'altro al risultato cui tendiamo.

Ma si può sospettare:

1) che le somme (12) forniscano tutte delle costanti;

2) che qualcuna delle somme (12) sia costante;

3) che le p funzioni di x, y, z fornite dalle (12) non siano tutte distinte, ma possano esprimersi linearmente in funzione di q di esse, dove $0 < q < p$.

Premesso che il caso 3) non differisce dal caso 2), come risulta sostituendo agli integrali $u_1(\xi), \ldots, u_p(\xi)$, convenienti combinazioni lineari di questi, noi dimostreremo:

I) che il caso 1) non può presentarsi nelle ipotesi fatte;

II) che se q delle somme (12) forniscono delle funzioni di x, y, z, e le altre $p-q$ danno delle costanti, la varietà di Picard V_p possiede due sistemi algebrici di imprimitività V_q e V_{p-q}, tenendo conto dei quali si ritrovano di nuovo i p integrali della f.

11. Dimostriamo anzitutto, per assurdo, che il caso 1) non può presentarsi. Si supponga, se è possibile, che, variando il punto (x) sulla superficie f, variando quindi le curve $C_1, C_2, \ldots, C_m$ del sistema S_1 che escono da esso (alle quali curve corrispondono i punti $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(m)}$ di γ), le somme (12) rimangano tutte costanti. Ciò significa che il gruppo $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(m)}$ varia entro una involuzione g_m^{m-1} della V_p (n. 6); quindi, sopra f, la curva somma $C_1 + C_2 + \cdots + C_m$ varia entro ad un sistema lineare. Il sistema algebrico di curve S_1 sopra f sarebbe dunque tale, che la somma delle m curve di S_1, uscenti da un punto di f, varierebbe entro ad un sistema lineare al variare di questo punto.

Ma un sistema S_1 di curve, il quale goda questa proprietà, è, per un teorema del sig. Severi (¹), contenuto totalmente entro un sistema lineare.

(¹) Il teorema in questione si enuncia così: *Se sopra una superficie f si ha un sistema algebrico (irriducibile) ∞^1, S_1, di curve, tale che la curva composta delle m curve di S_1, che escono da un punto di f, varî entro un sistema lineare al variare del punto, il sistema S_1 stesso è contenuto totalmente entro ad un sistema lineare.* Il teorema si deduce in modo semplice da un lemma notevolissimo sulle curve algebriche, che il Severi ha enunciato in una sua Nota dei Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences, 3 aprile 1905: « se in una curva algebrica si ha una serie Σ algebrica, irriducibile, ∞^1, di gruppi di punti, tale che il gruppo composto degli m gruppi di Σ contenenti un punto della curva varî in una serie lineare al variare del punto, allora tutti i gruppi di Σ appartengono ad una serie lineare ». Le dimostrazioni del lemma e del teorema si troveranno nella Memoria del sig. Severi: *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche,* che verrà presto pubblicata negli Annali di Matematica.

Nella redazione preliminare di questo mio lavoro, che ha dato luogo alla Nota dei

E ciò contraddice alla ipotesi fatta, secondo la quale le curve di S_1 non sono equivalenti a due a due.

12. Non possiamo invece escludere la ipotesi 2) (n. 10), la quale si verifica quando, delle p somme (12), alcune, q $(0 < q < p)$, forniscono funzioni linearmente distinte di x, y, z, mentre le rimanenti $p-q$ danno delle costanti. Dobbiamo dunque esaminare quale particolarità si presenti, se

$$(13)\qquad u_i(\xi^{(1)}) + \cdots + u_i(\xi^{(m)}) \equiv \begin{cases} \mathrm{I}_i(x, y, z) & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ k_i & (i = q+1, \ldots, p), \end{cases}$$

dove le k_i sono costanti. A tal fine fissiamo nella varietà di Picard V_p una qualsiasi involuzione g^m_{m+1}, ad es. quella rappresentata dalle congruenze

$$(14)\qquad u_i(\xi) + u_i(\xi^{(1)}) + \cdots + u_i(\xi^{(m)}) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

In virtù di questa g^m_{m+1}, ad ogni punto (x) di f, e quindi ad ognuno degli ∞^2 gruppi di m punti della curva γ che compariscono nelle (13), viene a corrispondere un unico punto (ξ) della varietà V_p, punto tale che

$$(15)\qquad u_i(\xi) \equiv \begin{cases} -\mathrm{I}_i(x, y, z) & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ -k_i & (i = q+1, q+2, \ldots, p). \end{cases}$$

Otteniamo così ∞^2 punti (ξ) di V_p, od, in casi particolari, ∞^1, il cui luogo F (superficie o curva) è in corrispondenza *razionale* colla superficie data f; precisamente ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F, mentre ad ogni punto di F corrisponde su f, o un numero finito di punti, o gli ∞^1 punti di una curva algebrica (variabile in un fascio irrazionale). In ogni caso i q integrali $u_i(\xi)$ (dove $i = 1, 2, \ldots, q$) di F forniscono q integrali distinti $-\mathrm{I}_i(x, y, z)$ di f.

Ora l'ente algebrico F contenuto nella varietà di Picard V_p è tale, che i p integrali di V_p forniscono solo $q < p$ integrali distinti di F, come ap-

---

Comptes Rendus (23 genn. 1905), io mi appoggiavo, per superare la difficoltà posta ora in luce, sopra considerazioni di *Analysis situs*, concernenti il confronto dei cicli lineari relativi alla superficie f ed alla varietà V_p. Nel preparare questa redazione definitiva mi sono accorto che quelle considerazioni potevano prestarsi a qualche obbiezione, per superar la quale si andava incontro a serie complicazioni. Intanto il signor Severi, imbattutosi in difficoltà analoghe, era riuscito a vincerle mediante il lemma ed il teorema sopra enunciati. Grato dell'autorizzazione che il sig. Severi mi accorda, approfitto anch'io di quelle proprietà veramente notevoli.

Aggiungo che la difficoltà nominata si supererebbe pure, nel mio caso, ove si dimostrasse, valendosi della rappresentazione parametrica (7) della V_p, il seguente teorema relativo a quella varietà: « Si abbia, entro V_p, un sistema algebrico di varietà W, a $p-1$ dimensioni, e si considerino le intersezioni $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(m)}$ di una W con una curva algebrica generica γ di V_p. Se le p somme (12) non variano, al variare della W, il sistema descritto dalla W è contenuto totalmente in un sistema lineare ».

pare dalle (15). Ci troviamo dunque nel caso previsto dal teorema del n. 9. Concludiamo che, nelle ipotesi attuali, la varietà di Picard V_p contiene un sistema ∞^{p-q} di varietà algebriche V_q, sopra le quali il gruppo G_p opera imprimitivamente; ciascuna V_q è mutata in sè stessa dalle trasformazioni di un sottogruppo algebrico G_q di G_p. Una di queste V_q, luogo di punti (ξ) soddisfacenti alle congruenze

$$u_i(\xi) \equiv -k_i \qquad (i = q+1, q+2, \ldots, p),$$

contiene entro a sè l'ente algebrico F.

Viceversa, se la varietà di Picard V_p gode la particolarità ora enunciata, certo potrà presentarsi il caso che stiamo esaminando. Basta a tal fine scegliere la curva γ entro una delle V_q, giacchè allora per tutti i punti di γ gli integrali $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_p$ conservano valori costanti, sicchè si troveranno verificate relazioni del tipo (13). Noi otteniamo dunque soltanto q integrali $I_1, I_2, \ldots, I_q$ della nostra superficie f; ma ciò dipende dal fatto, che la scelta particolare della curva γ entro V_p ci permette di usufruire soltanto di q tra i p integrali che V_p possiede.

È facile ora vedere come si otterranno i $p-q$ integrali della superficie f, che non si sono presentati sinora. Basta ricordare che, nel caso attuale, la varietà V_p, contenendo ∞^{p-q} V_q trasformate in sè da un gruppo G_q, contiene, in conseguenza, ∞^q V_{p-q} trasformate in sè da un gruppo G_{p-q} (n. 9).

Fissiamo entro una di queste V_{p-q} una curva algebrica γ' generica, ed applichiamo ad essa il procedimento che poc'anzi si è applicato a γ. Otterremo così, mediante gli integrali $u_{q+1}(\xi), \ldots, u_p(\xi)$ di V_p, certi $p-q$ integrali $I_{q+1}(x, y, z), \ldots, I_p(x, y, z)$ di f, che saranno linearmente distinti tra loro e dai precedenti. E riusciremo in tal modo a completare il numero totale p degli integrali semplici, distinti, di prima specie, che appartengono alla superficie f.

Risulta poi chiaro che l'aver trovato separatamente due gruppi, uno di q, l'altro di $p-q$ integrali, dipende dalla scelta particolare della curva composta $\gamma + \gamma'$ che si è adoperata. Se, dopo aver reso connessa una tal curva col far passare γ e γ' per uno stesso punto comune a V_q e a V_{p-q}, si fa variare con continuità la curva $\gamma + \gamma'$, in modo che essa diventi irriducibile, restando algebrica, si perverrà ad una curva Γ, la quale, collo stesso procedimento applicato prima a γ e γ', fornirà insieme p integrali distinti di f.

Concludiamo quindi che, qualunque particolarità presenti la varietà di Picard V_p, sempre la superficie f possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie. Che ogni altro integrale semplice, di prima specie, possa esprimersi linearmente mediante quelli, sarà dimostrato tra poco.

13. Fra i varî modi che permettono di fissare un sistema di p integrali semplici, distinti, della superficie f, giova notare il seguente, che è fondato sulle considerazioni dell'ultimo numero.

Ricordiamo che, valendoci di una curva algebrica γ situata in V_p, noi siamo riusciti a costruire, entro V_p, una superficie (eventualmente curva) algebrica F, la quale è in corrispondenza razionale colla superficie data f; precisamente ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F. I p integrali semplici, distinti, di prima specie di V_p, che abbiamo indicato con $u_i(\xi)$, ci forniscono p integrali di F, che sono distinti, se la V_p non possiede divisioni algebriche di imprimitività (n. 8). In questa ipotesi, noi possiamo assumere, come valori di p integrali distinti I_i di f nel punto (x), i valori che hanno gli integrali $u_i(\xi)$ nel punto corrispondente ξ di f. Possiamo dunque porre

$$I_i(x, y, z) \equiv u_i(\xi), \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

le congruenze avendo per moduli i periodi di u_i. Otteniamo così p integrali di f, i cui periodi sono combinazioni lineari, a coefficienti interi, dei periodi degli integrali u_i di V_p. Che anche i primi periodi, per ciascun integrale, siano esattamente in numero di $2p$, risulterà dalle considerazioni del numero seguente.

Se invece la V_p ammette due sistemi algebrici di imprimitività, composti rispettivamente di V_q e di V_{p-q}, allora, col mezzo di una curva γ tracciata in una V_q, e di una γ' tracciata in una V_{p-q}, noi possiamo costruire due superficie (eventualmente curve) F, F', la prima delle quali sarà contenuta in una V_q, l'altra in una V_{p-q}. Ad ogni punto (x) di f corrisponde *un* punto (ξ) di F ed *un* punto (ξ') di F'. Ora la V_q possiede q integrali semplici, distinti, di prima specie, ad es. $u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots, u_q(\xi)$, con $2q$ periodi, i quali integrali, mentre il punto (ξ) varia su F, ci forniscono q integrali di F. Similmente la V_{p-q} possiede $p-q$ integrali distinti, con $2(p-q)$ periodi, che possiamo indicare con $u_{q+1}(\xi'), u_{q+2}(\xi'), \ldots, u_p(\xi')$, e che forniscono $p-q$ integrali di F'. Convenendo che al punto (x, y, z) di f corrispondano i punti $(\xi), (\xi')$ di F, F' rispettivamente, poniamo

$$I_i(x, y, z) \equiv \begin{cases} u_i(\xi) & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ u_i(\xi') & (i = q+1, \ldots, p). \end{cases}$$

Avremo così, in tutto, p integrali di f, che si distribuiscono in due classi, composte di q e $p-q$ integrali, rispettivamente; primi integrali sono *riducibili* a q integrali dotati di $2q$ sistemi di periodi simultanei, ed i secondi integrali sono *riducibili* a $p-q$ integrali con $2(p-q)$ sistemi di periodi.

14. Le considerazioni precedenti, le quali provano che una superficie f, avente l'irregolarità p, possiede p integrali semplici, distinti, di prima specie, lasciano il dubbio che la superficie possa ammettere altri integrali analoghi, distinti da quelli. Un tal dubbio però vien rimosso, ricorrendo, ad es., al

ragionamento che il sig. Severi ha esposto nella sua Nota *Sulla differenza tra i numeri degli integrali*..... (1). Eccone il concetto. Si abbia un integrale di prima specie di f, i cui periodi (ove si mettano in evidenza le parti reali ed immaginarie) siano $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots$ Si può allora, in virtù di un teorema del sig. Picard, formare due integrali semplici di *seconda* specie di f, il primo dei quali abbia i periodi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, ed il secondo i periodi $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Se dunque la superficie possiede $p' \geqq p$ integrali semplici di prima specie, si otterranno, nel modo detto, $2p'$ integrali di seconda specie, dei quali si può affermare che sono distinti tra loro. D'altra parte la differenza tra i numeri degli integrali distinti di seconda e di prima specie, differenza che, in virtù delle cose dette, è maggiore od uguale a p', si sa esser uguale a p (2). Segue $p' = p$; e segue ancora che il numero degli integrali distinti di seconda specie è esattamente $2p$. Altrettanti sono dunque i cicli lineari che possiede la superficie, riguardata come una varietà reale di Riemann a quattro dimensioni (3).

Raccogliendo tutti i principali risultati ottenuti sin qui, perveniamo al teorema fondamentale seguente:

Una superficie algebrica, avente i generi p_g, p_a e quindi l'irregolarità $p = p_g - p_a$, possiede esattamente p integrali semplici, distinti, di prima specie, e $2p$ integrali semplici, distinti, di seconda specie. La varietà reale a quattro dimensioni, che rappresenta la superficie nel senso di Riemann, ammette $2p$ cicli lineari distinti, ed ha la connessione lineare $p_1 = 2p + 1$. Gli integrali nominati hanno dunque $2p$ sistemi di periodi simultanei.

Risulta qui evidente la perfetta analogia di questo risultato coi noti teoremi di Riemann, relativi agli integrali abeliani di prima e seconda specie annessi ad una curva di genere p. Quando si ponga mente alla connessione lineare, l'*irregolarità* di una superficie ha un ufficio analogo al *genere* di una curva; e le superficie regolari sono paragonabili alle curve razionali.

L'analogia si estende anche al caso di riducibilità degli integrali. Se, tra i p integrali di prima specie di una superficie, esistono $q < p$ integrali distinti, riducibili a q integrali con $2q$ periodi, esisteranno pure altri $p - q$ integrali, distinti tra loro e da quelli, che saranno riducibili ad un sistema di $p - q$ integrali con $2(p - q)$ periodi. Nel tempo stesso la varietà di Picard V_p annessa alla superficie presenta le particolarità algebriche menzionate al n. 9. Ciò risulta facilmente dalle cose dette; ma è pur contenuto

(1) Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 22 genn. 1905.

(2) Teorema dei sigg. Picard e Severi; si vedano i Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences del 16 gennaio 1905, e la Nota sopra citata del sig. Severi.

(3) Cfr. la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* dei sigg. Picard e Simart, t. I, pag. 150.

nella teoria più volte citata della riducibilità degli integrali abeliani, la quale si estende immediatamente agli integrali sopra considerati.

15. Gli ultimi risultati, e le considerazioni con cui furono ottenuti, trovano immediata applicazione alle superficie aventi l'irregolarità 1 o 2.

Segue, ad es., dal n. 13 che una superficie f avente l'irregolarità 1 può rappresentarsi razionalmente sopra una varietà di Picard ad 1 dimensione, cioè sopra una curva ellittica V_1. Ad ogni punto di V_1 corrisponde su f una curva algebrica; le ∞^1 curve algebriche, che così si ottengono, formano un fascio ellittico. Le curve qui nominate potrebbero, a dir vero, spezzarsi in più curve di un nuovo fascio irrazionale, ma il genere π di questo fascio non può superare 1, giacchè altrimenti la superficie possederebbe almeno π integrali semplici e distinti, di prima specie, il che non è possibile se $p=1$. Dunque: *una superficie di irregolarità* 1 *possiede un fascio ellittico di curve algebriche* [1]. Lo stesso teorema vale se la superficie f, pur avendo l'irregolarità $p>1$, possiede un integrale di prima specie riducibile ad ellittico, giacchè allora la varietà di Picard V_p ha un sistema di imprimitività composto di ∞^{p-1} curve ellittiche V_1; sopra una di queste si potrà dunque rappresentare razionalmente la f. Occorre però avvertire che, nel caso presente, la curva generica del fascio ellittico può scindersi in più curve di un fascio di genere π, tale che $1 \leqq \pi \leqq p$.

Consideriamo ora una superficie f di irregolarità $p=2$. La varietà di Picard V_2 è in tal caso una superficie iperellittica. La f potrà dunque rappresentarsi razionalmente sopra una superficie iperellittica (cioè birazionalmente sopra la detta superficie contata una o più volte), oppure sopra una curva di genere $\pi \leqq 2$ della superficie iperellittica. Ricordando che l'ipotesi $\pi=1$ porta la presenza di due fasci ellittici di curve ellittiche sulla V_2, si giunge al teorema:

Una superficie avente l'irregolarità 2 è birazionalmente identica ad una superficie iperellittica semplice o multipla: oppure la superficie primitiva contiene un fascio di genere 2 di curve, o due fasci ellittici di curve.

16. Ritorniamo al teorema fondamentale di questa Nota (n. 14), ed all'analogia rilevata tra le superficie aventi l'irregolarità p e le curve di genere p. Il procedimento da noi seguito mette in luce la ragione intima di questa analogia. Infatti tutte le considerazioni svolte nella Nota I (n. 1 — 4) sugli ∞^p sistemi lineari, regolari, di curve contenuti in uno stesso sistema algebrico, sopra una superficie di irregolarità p, si trasportano senz'altro alle ∞^p serie lineari non speciali g_n^{n-p}, di ordine dato $n \geqq p$, esistenti sopra una curva C di genere p. Anche queste serie possono rappresentarsi sopra

[1] Cfr. Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve.....*, Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, 28 febbraio 1904.

i punti di una varietà algebrica V_p, a p dimensioni, la quale ammette un gruppo G_p di trasformazioni birazionali in sè, permutabili a due a due. E la V_p non dipende dall'ordine n da cui si parte, purchè sia $n \geqq p$; sicchè la V_p può riguardarsi come rappresentante gli ∞^p gruppi di p punti di una curva C di genere p (1). Il legame tra gli integrali abeliani di C e gli integrali semplici di V_p si potrebbe stabilire in modo perfettamente analogo a quello da noi tenuto per dedurre gli integrali della superficie f dagli integrali di V_p; sebbene, nel caso delle curve, si possa procedere in modo più semplice. Ma dove la considerazione della V_p, relativa ad una curva C, sembra riuscir vantaggiosa, è nello studio dei casi di riducibilità degli integrali abeliani di C; allora infatti la varietà V_p possiede due sistemi algebrici di imprimitività ($\infty^{p-q}\, V_q$ ed $\infty^q\, V_{p-q}$), ed in corrispondenza il gruppo G_p ammette due sottogruppi algebrici G_q, G_{p-q}.

Non voglio però fermarmi qui sopra tale soggetto. Accennerò piuttosto ad un'altra questione, che si presenta naturalmente, quando si cerchi il numero dei *moduli* (invarianti per trasformazioni birazionali), da cui dipende la V_p relativa ad una curva o superficie assegnata. Ricordo a tal fine che una varietà *generale* V_p, dotata di un gruppo G_p di trasformazioni birazionali in sè, dipende da $\dfrac{p(p+1)}{2}$ moduli, come risulta dalla teoria delle funzioni $2p$ volte periodiche di p variabili, funzioni che, come dicemmo, forniscono una rappresentazione parametrica della V_p. Risulta d'altra parte dalle ricerche di Riemann che, se la V_p rappresenta i gruppi di p punti di una curva di genere p, essa ha un grado di generalità inferiore, perchè quella curva e la relativa V_p dipendono da $3p-3$ moduli ($p>1$), numero inferiore al precedente, se $p>3$. Si poteva sospettare che una riduzione analoga nel numero dei moduli avvenisse per una V_p legata con una superficie di irregolarità p.

Ebbene, ciò non è. Infatti da considerazioni del sig. Enriques e mie, che saranno pubblicate in seguito, risulta che le varietà di Picard, relative alle superficie di irregolarità p, dipendono proprio da $\dfrac{p(p+1)}{2}$ moduli. In termini più esatti: « determinata una V_p coll'esprimere che le coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}$ di un suo punto generico sono funzioni abeliane *generali*, cogli stessi periodi, di p variabili, esistono infinite superficie, di irregolarità p, che hanno la V_p come varietà di Picard ». Od anche: « fissato un sistema di $2p^2$ quantità $a_{ik} (i=1, 2, \ldots, p;\ k=1, 2, \ldots, 2p)$, che possano esser prese come periodi di una funzione abeliana generale di p va-

(1) Il gruppo G_p delle trasformazioni in sè della V_p relativa ad una curva trovasi già studiato, per via elementare (algebrica), in una mia Nota, *Le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti....*, inserita nei Rendic. del R. Istit. Lomb. dell'anno 1893.

riabili, esistono infinite superficie di irregolarità p, i cui p integrali semplici, distinti, di prima specie, I_i, hanno i periodi $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,2p}$ ".

Si ricordi però che due superficie f, f', aventi la stessa varietà di Picard, non sono generalmente in corrispondenza birazionale tra loro. Sta solo il fatto che ogni sistema algebrico di curve di f è birazionalmente identico ad un sistema algebrico di curve di f'.

Matematica. — *La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Delle superficie S_5 di 5° ordine con quintica doppia si occuparono [1] Clebsch, Cremona, Sturm, Caporali e Del Re, ma nessuno di questi Autori ha fatta la classificazione delle varie specie di superficie dal punto di vista della realità o immaginarietà di alcune delle 10 rette che essa contiene, mentre un'analoga classificazione è stata fatta per le superficie di 3° ordine (Schlaefli, Sturm, Cremona) [2] e per le superficie di 4° ordine a conica doppia (Zeuthen, Segre) [3], le quali, come si sa, hanno colle superficie di cui parliamo un intimo legame in rapporto alle rette che esse contengono; e il legame è che, come la configurazione delle rette della superficie di 4° ordine a conica doppia è la stessa di quella delle 16 rette restanti fra le 27 rette di una superficie di 3° ordine, quando di queste se ne sopprima una e le 10 che la incontrano, così la configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia è la stessa di quella delle restanti fra le 16 della precedente, quando di queste se ne sopprima una e le cinque che la incontrano. Il metodo che io adopero per ottenere, in modo semplicissimo e immediato, la classificazione delle S_5, non è fondato su principî geometrici nè su uno studio geometrico delle S_5 medesime, ma è invece un metodo puramente *combinatorio*, fondato sullo studio della configurazione delle rette, e su di una loro rappresentazione. Esso è lo stesso di quello che ho già adoperato per la sestica storta, e per la superficie di Kummer in altri due lavori recenti [4], e che può anche adoperarsi per le superficie di 3° ordine, e per quelle di 4° ordine a conica doppia, per ottenere i risultati medesimi che sono stati ottenuti per via geometrica da altri; così il nostro metodo combinatorio in tutti questi casi ha il conforto del controllo.

(1) Per le indicazioni bibliografiche rimando al cap. XIII, § 1 del II volume del mio *Repertorio di Matem. superiori* (ediz. italiana, Milano 1900, pag. 497; edizione tedesca, Leipzig 1902, pag. 349).

(2) Ibid., cap. XI, § 4.

(3) Ibid., cap. XII, § 6.

(4) Pascal, *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine* ecc., Rend. Ist. Lomb. 2), t. 38, 1905, pag. 579; *Sulla classificazione delle superficie di Kummer*, ibid., pag. 688.