ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

riabili, esistono infinite superficie di irregolarità p, i cui p integrali semplici, distinti, di prima specie, I_i, hanno i periodi $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,2p}$ ».

Si ricordi però che due superficie f, f', aventi la stessa varietà di Picard, non sono generalmente in corrispondenza birazionale tra loro. Sta solo il fatto che ogni sistema algebrico di curve di f è birazionalmente identico ad un sistema algebrico di curve di f'.

Matematica. — *La classificazione delle superficie di 5° ordine con quintica doppia.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Delle superficie S_5 di 5° ordine con quintica doppia si occuparono [1] Clebsch, Cremona, Sturm, Caporali e Del Re, ma nessuno di questi Autori ha fatta la classificazione delle varie specie di superficie dal punto di vista della realità o immaginarietà di alcune delle 10 rette che essa contiene, mentre un'analoga classificazione è stata fatta per le superficie di 3° ordine (Schlaefli, Sturm, Cremona) [2] e per le superficie di 4° ordine a conica doppia (Zeuthen, Segre) [3], le quali, come si sa, hanno colle superficie di cui parliamo un intimo legame in rapporto alle rette che esse contengono; e il legame è che, come la configurazione delle rette della superficie di 4° ordine a conica doppia è la stessa di quella delle 16 rette restanti fra le 27 rette di una superficie di 3° ordine, quando di queste se ne sopprima una e le 10 che la incontrano, così la configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia è la stessa di quella delle restanti fra le 16 della precedente, quando di queste se ne sopprima una e le cinque che la incontrano. Il metodo che io adopero per ottenere, in modo semplicissimo e immediato, la classificazione delle S_5, non è fondato su principî geometrici nè su uno studio geometrico delle S_5 medesime, ma è invece un metodo puramente *combinatorio*, fondato sullo studio della configurazione delle rette, e su di una loro rappresentazione. Esso è lo stesso di quello che ho già adoperato per la sestica storta, e per la superficie di Kummer in altri due lavori recenti [4], e che può anche adoperarsi per le superficie di 3° ordine, e per quelle di 4° ordine a conica doppia, per ottenere i risultati medesimi che sono stati ottenuti per via geometrica da altri; così il nostro metodo combinatorio in tutti questi casi ha il conforto del controllo.

(1) Per le indicazioni bibliografiche rimando al cap. XIII, § 1 del II volume del mio *Repertorio di Matem. superiori* (ediz. italiana, Milano 1900, pag. 497; edizione tedesca, Leipzig 1902, pag. 349).

(2) Ibid., cap. XI, § 4.

(3) Ibid., cap. XII, § 6.

(4) Pascal, *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine* ecc., Rend. Ist. Lomb. 2), t. 38, 1905, pag. 579; *Sulla classificazione delle superficie di Kummer*, ibid., pag. 688.

Prima di passare pertanto alla S_5, diciamo qualcosa delle altre due superficie qui ricordate.

1. Non ripeteremo le varie considerazioni già fatte nelle due Note succitate, in riguardo al nostro *metodo combinatorio*, e per brevità rimanderemo il lettore a quelle Note, entrando senz'altro nell'applicazione del metodo. Le 27 rette della superficie cubica possono essere rappresentate simbolicamente dalle congiungenti a due a due 8 punti fondamentali $1, 2, \dots 8$, quando di queste congiungenti se ne sopprima una, p. es. la (12); *in tale rappresentazione due congiungenti sono da considerarsi rappresentanti due rette che si incontrano o no secondochè esse colla congiungente fissa* (12) *formano una cosidetta terna dispari o una terna pari* [1], ricordando che *terna pari* è un assieme di tre rette rappresentative formanti figure dei seguenti tre tipi

$$\left.\begin{array}{l}(12)\ (23)\ (31)\\ (12)\ (13)\ (14)\\ (12)\ (13)\ (45)\end{array}\right\}\ (\textit{terne pari})$$

e *terna dispari* è un assieme di tre rette rappresentative formanti invece figure dei seguenti due altri tipi:

$$\left.\begin{array}{l}(12)\ (23)\ (34)\\ (12)\ (34)\ (56)\end{array}\right\}\ (\textit{terne dispari}).$$

Un piano tritangente è rappresentato da tre rette che, insieme colla retta fissa (12), *formano una quaterna di cui tutte le terne sono dispari*, (nei miei lavori precedenti una tale quaterna è chiamata una *quaterna-zero*).

Supponiamo ora che alcuni degli otto punti fondamentali diventino immaginarî a due a due coniugati, e propriamente, secondo i principî sviluppati nelle mie Note già citate, in modo che di ognuna delle 27 rette che diventi immaginaria vi sia sempre un'altra da considerarsi come coniugata, perchè congiunge punti coniugati di quelli congiunti dalla prima. Otteniamo allora, come ora mostreremo brevemente, tutta la nota classificazione di Schlaefli.

Supposti immaginarî coniugati i due punti 1 e 2, le 15 congiungenti gli altri sei punti sono reali, e sono immaginarie le 12 congiungenti (formanti una bisestupla di Schlaefli) [2] i punti (1) o (2) cogli altri.

Si hanno quindi 15 rette reali e 12 immaginarie formanti una bisestupla di Schlaefli.

[1] Vedi la mia Memoria: *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche* ecc., Annali di Matematica (2), t. XX, 1892, § 27.

[2] Vedi il § 6 della mia Memoria: *Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica*, Annali di Matematica (2), t. XXI, 1893, pp. 85-137

Le 12 immaginarie sono a due a due coniugate ma non concorrenti, quindi senza punto reale; p. es. sono coniugate (31) e (23), ma queste con (12) formano una terna pari. *Dei 45 piani tritangenti ve ne sono 15 reali,* perchè altrettante sono le quaterne-zero reali contenenti la retta (12), e *gli altri sono immaginarî* perchè tutti del tipo (23) (34) (41) contenenti cioè una retta reale e due immaginarie non coniugate.

Per ogni retta reale (come p. es. (34)) *passano tre dei piani reali* (p. es. (34) (56) (78) , (34) (57) (68) , (34) (58) (67)).

Questa varietà di superficie è precisamente la seconda di quelle contenute nella classificazione di Schlaefli (la prima è naturalmente quella con tutte le rette reali) e alla medesima varietà si giungerebbe se si supponessero immaginarî coniugati i punti (3), (4).

Supposti ora immaginarî coniugati i punti (1), (2) e (3), (4) *si hanno sette rette reali,* cioè la (34) e le congiungenti i punti (5), (6), (7), (8); *quattro rette immaginarie ma con un punto reale* [1] (le (13), (24), (14), (23)) *e le rimanenti 16 immaginarie senza punto reale. Di piani reali se ne ha cinque di due specie,* cioè i tre piani (34) (56) (78) , (34) (57) (68), (34) (58) (67), passanti ciascuno per tre rette reali, e i due piani (34) (13) (24), (34) (14) (23), passanti per una retta reale e due immaginarie coniugate con un punto reale; *i cinque piani passano per una medesima retta.* Questa è la terza varietà di Schlaefli e alla stessa si giunge supposti immaginarî coniugati i punti (3), (4) e (5), (6).

Alla quarta varietà si giunge supponendo coniugati i punti (1), (2); (3), (4) ; (5), (6). Si hanno allora *le tre rette reali* (34), (56), (78) *situate in un piano tritangente (reale); le rimanenti rette sono tutte immaginarie, ma di esse 12 hanno sempre un punto reale* (come (13), (24), ...) *e le altre no* (come (37), (38), ...). *Queste ultime 12 formano una bisestupla di Schaefli.*

I piani reali sono $1 + 6 = 7$; uno è il piano delle tre rette reali, e gli altri sono piani con una retta reale e due immaginarie coniugate con un punto reale (p. es. (13) (34) (42)); *per ogni retta reale passano due altri piani reali, oltre quello delle tre rette* (così per (34) passano anche i piani (34) (13) (42) , (34) (14) (23)).

E finalmente la quinta varietà di Schlaefli si ottiene facendo diventare immaginarie coniugate le coppie di punti (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) ; (7), (8). Si hanno allora *le tre rette reali* (34), (56), (78); *le altre 24 rette sono tutte immaginarie ma con un punto reale; vi sono 12 piani reali, di cui uno con tre rette reali, e gli altri 12 con una retta reale e due*

[1] Le *punktirte* dei tedeschi. Alcuni (come p. es. Zeuthen, Annali di Matem. (2). t. XIV, 1879) chiamano *rette di 1ª specie* le rette immaginarie con un punto reale, e *di 2ª specie* le immaginarie senza punto reale.

immaginarie coniugate. Per ciascuna delle tre rette reali passano in tutto 5 piani reali.

Se ora supponiamo due degli otto punti coincidenti, p. es. i punti (1), (2), e poi facciamo tutte le possibili ipotesi sulla immaginarietà degli altri, otteniamo, come può facilmente vedersi, tutte le già note quattro varietà di superficie cubiche con un punto doppio; similmente si potrebbero ottenere le 6 varietà di superficie con due punti doppî, tre coi punti doppî reali, e tre coi medesimi immaginarî coniugati, e così di seguito, potrebbe p. es. così ottenersi in poche righe tutta intera la classificazione contenuta nell'opera di R. Sturm [1]. A noi però basti questo cenno di applicazione del metodo combinatorio, e passeremo a trattare similmente, in un breve cenno, delle superficie di 4° ordine a conica doppia.

2. Delle 27 rette precedenti soppressane una, p. es. la (34), e le 10 che la incontrano, cioè le (56), (78), (57), (68), (58), (67), (13), (24), (14), (23), le rimanenti rappresentino le 16 rette di una superficie di 4° ordine a conica doppia; le quali restano così rappresentate dalle 16 congiungenti i quattro punti (1), (2), (3), (4) cogli altri quattro. Se invece facciamo che la retta soppressa sia la (23) e le 10 altre che incontrano questa, le 16 rette della superficie sono rappresentate dalle 15 congiungenti a due due i punti (2), (4), (5), (6), (7), (8), e dalla retta (13).

Le due figure rappresentative delle 16 rette, così ottenute, sono le medesime due che nel lavoro già citato di sopra sulle superficie di Kummer servono a rappresentare i 16 piani singolari di questa superficie, e da cui abbiamo dedotto le ordinarie notazioni adoperate dai geometri per tali piani. Onde: *per le 16 rette della superficie di 4° ordine a conica doppia possono adoperarsi le medesime due notazioni che si adoperano per i 16 piani singolari della superficie di Kummer.*

Uno dei 40 piani tritangenti della superficie è rappresentato da una coppia di rette (scelte fra le 16) che, insieme ad una delle due rette principali soppresse nella figura totale delle 28 rette, forma una terna dispari, e ciascuno dei noti cinque coni di Kummer può essere rappresentato da ciascuna delle cinque quaterne-zero che si possono formare colle due rette principali soppresse e colle cinque altre coppie formate dalle 10 altre rette anche soppresse [2].

Così nella prima delle due rappresentazioni i piani sono rappresentati dalle coppie

$$(15)\,(26)\,,\,(15)\,(27)\,,\,(15)\,(53)\,,\ldots$$

[1] R. Sturm, *Syntetische Untersuchungen über Flächen 3ter Ordnung*, Leipzig, 1867, cap. VII, da pag. 281 a pag. 348.

[2] Ciò dipende dalla nota corrispondenza esistente fra i cinque coni di Kummer della superficie di 4° ordine e i cinque piani soppressi relativi alla superficie cubica.

e i coni di Kummer sono rappresentati dalle quaterne formate con (12). (34) e ciascuna delle coppie

(56), (78) ; (57), (68) ; (58), (67) ; (13), (24) ; (14), (23).

Se ora facciamo le solite ipotesi sulla immaginarietà dei punti rappresentativi, abbiamo la nota classificazione delle superficie in 6 varietà [1]; poniamo reali tutti i punti e abbiamo tutte le 16 rette reali; poniamo immaginarî coniugati (1), (2) e abbiamo la varietà con 8 rette reali e 8 immaginarie senza punto reali; poniamo immaginarie coniugate le due coppie (1), (2) e (5), (6) e abbiamo la varietà con 4 rette reali, 4 immaginarie con punto reale e le rimanenti immaginarie senza punto reale; e se invece poniamo immaginarie coniugate le due coppie (1), (2) ; (3), (4) abbiamo tutte le 16 rette immaginarie senza punto reale. Col supporre immaginarie le tre coppie (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) abbiamo la varietà con 8 rette immaginarie a punto reale e 8 immaginarie senza punto reale, e finalmente coll'ipotesi dell'immaginarietà di tutte le quattro coppie (1), (2) ; (3), (4) ; (5), (6) ; (7), (8) si hanno tutte le 16 rette immaginarie con punto reale.

Si potrebbe ora cogli stessi principî esaminare caso per caso la realità dei coni, quella dei piani, e indi esaminare anche i casi in cui alcuni dei punti rappresentativi coincidano, casi che corrispondono a quelli in cui la superficie ha punti doppî; p. es. se supponiamo coincidenti i punti (1), (2) si hanno 4 rette doppie e 8 semplici, e questo è il caso della superficie con un punto doppio (è la specie [2111] di Segre, cit., pag. 361), e di queste possono poi nel solito modo distinguersi tutte le varietà.

Ma questo rapido cenno ci pare che basti per mostrare in che facile modo può come compendiarsi tutta la classificazione; passiamo pertanto a fare lo stesso per la superficie di 5° ordine a quintica doppia.

3. Il sopprimere una delle 16 rette precedenti e le cinque che la incontrano corrisponde a sopprimere, nella figura primitiva di tutte le (28) congiungenti, tre rette formanti una terna pari, e tutte quelle che con due di queste formino una terna dispari. Le 10 rette restanti rappresentano quelle della S_5.

Poichè una terna pari può presentare tre figure diverse (vedi sopra), così si avrebbero tre rappresentazioni le quali però, come si vede, si riducono subito a due.

Ed infatti se la terna pari soppressa è costituita da tre rette formanti un triangolo (67), (78), (86), *le 10 rette restano rappresentate dalle congiungenti i primi cinque punti a due a due*, e un'analoga rappresentazione si ottiene se la terna pari di rette è quella costituita da tre rette passanti per un punto (formanti un fascio), p. es. (56), (57), (58).

[1] Zeuthen, Ann. di Math. (2), t. XIV; Segre, Math. Ann., t. XXIV.

Se invece la terna pari è quella delle rette (45), (67), (68), *le 10 rette sono rappresentate dalle congiungenti ciascuno dei punti* (1), (2), (3) *coi punti* (4), (5), (6), *e dalla retta isolata* (78).

Due rette che s' incontrano sono sempre rappresentate da due congiungenti formanti una terna dispari con ciascuna delle tre soppresse [1]; perciò nella prima rappresentazione, in cui la terna pari soppressa è quella delle tre rette formanti un triangolo, due rette che si incontrano sono rappresentate da una coppia di rette non aventi alcun punto comune (fra i cinque fondamentali); nella seconda rappresentazione due rette che si incontrano sono rappresentate da coppie di *due* specie, cioè come

$$(15)\,(12)\,,\quad \text{ovvero}\quad (12)\,(34)\,,$$

se la terna pari soppressa è la (56), (57), (58); e finalmente nella terza rappresentazione le coppie di rette che si incontrano sono rappresentate da coppie di *tre* specie diverse, e cioè:

$$(15), (16)\ ;\ (16), (78)\ ;\ (14), (25)\,.$$

Di qui ne vengono in modo naturale tre possibili diverse notazioni per le 10 rette della superficie S_5; e di queste la seconda è quella stessa che si si è presentata finora agli Autori che ne hanno trattato [2], mentre le altre due sono state trascurate pur essendo, la prima di esse, la più semplice di tutte, perchè per essa non c' è che *un tipo solo* di coppie di rette concorrenti.

La notazione adoperata finora è la seguente: si indichino quattro rette, formanti un assieme gobbo, con gli indici 1, 2, 3, 4, e le altre colle combinazioni binarie di questi indici; la retta (1) incontra le tre (12), (13), (14), e la retta (12) incontra le tre (1), (2), (34). Ora, se agli indici isolati 1, 2, 3, 4, aggreghiamo un quinto indice 5, abbiamo, come si vede, e come avevamo asserito, esattamente la seconda delle sopraindicate notazioni.

Adottando pertanto, come più semplice e simmetrica, la prima delle tre rappresentazioni qui trovate, *le 10 rette restano rappresentate dalle combinazioni binarie di 5 indici, e due rette concorrenti corrispondono a due combinazioni senza indici comuni.*

Vi sono 15 piani π contenenti due rette e 15 punti P intersezioni delle medesime.

È noto che si possono formare cinque quaterne gobbe di rette, che hanno una grande importanza nello studio della superficie. Secondo la indicata rappresentazione ciascuna di tali quaterne è data dalle quattro congiungenti uno dei cinque punti cogli altri quattro; quindi *le cinque quaterne gobbe vengono a corrispondere biunivocamente ai cinque punti della rappresentazione.*

(1) Se la formano con una, la formeranno anche con ciascuna delle altre due.

(2) Vedi p. es. Caporali, Annali di Matematica (2), t. VII, 1875-76, pp. 149-188. [pag. 156].

Adoperando ora lo stesso metodo tenuto nei due paragrafi precedenti, ci si presentano immediatamente tre varietà della superficie generale; e cioè:

a) Tutti i cinque punti sieno reali; *le 10 rette sono tutte reali;*

b) Sieno immaginarî coniugati i punti 1 , 2. *Restano solo 4 rette reali di cui una incontra le altre tre che a due a due non si incontrano fra loro. Ogni retta immaginaria non incontra la propria coniugata, quindi esse non hanno punto reale.*

Delle quaterne gobbe ve ne sono 2 formate con una retta reale e tre immaginarie, e 3 formate con due rette reali e due immaginarie coniugate.

Dei 15 piani π *ve ne sono tre reali passanti per una stessa retta, e gli altri immaginarî, e dei 15 punti* P *ve ne sono 3 reali situati su di una retta, e gli altri immaginarî.*

c) Sieno immaginarî coniugati i punti 1 , 2 e 3 , 4. *Restano reali solo due rette concorrenti; quattro altre sono immaginarie con punto reale, e le rimanenti quattro sono immaginarie ma senza punto reale. Vi sono 4 quaterne gobbe formate da una retta reale e tre immaginarie di cui due coniugate, e 1 quaterna formata con quattro rette immaginarie coniugate a due a due.*

Vi sono 3 piani π *reali, non aventi alcuna retta (fra le 10) in comune, e 3 punti* P *reali situati su rette diverse.*

Queste sono le varietà che ci si presentano come le uniche possibili dal punto di vista del nostro metodo combinatorio.

Fisica. — *Sulla natura della pressione osmotica.* Nota di A. Battelli e A. Stefanini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della canfora* (1). Nota del Corrispondente A. Angeli e del dott. V. Castellana.

Lo studio dell'azione dell'acido nitroso sopra le ossime di alcuni chetoni terpenici condusse uno di noi e Rimini, ancora nel 1895 (2) alla scoperta dei *pernitrosoderivati*, che stanno in rapporto molto semplice con le sostanze da cui derivano:

$$>C:NOH \longrightarrow >C:N_2O_2,$$

dove lasciammo indeterminata la struttura del residuo

$$>N_2O_2,$$

per attendere i risultati delle ulteriori ricerche.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio farmaceutico della R. Università di Palermo.

(2) Berliner Berichte XXVIII, 1077 e seg.