# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

**Matematica.** — *Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili*. Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Il problema, così importante per la teoria dei sistemi dinamici olonomi e per la geometria differenziale degli iperspazii, di trovare tutte le coppie di varietà geodeticamente applicabili (rappresentabili l'una sull'altra con conservazione delle geodetiche) fu risoluto per le superficie dal prof. Dini, nel caso generale dal prof. Levi-Civita (Annali di Matematica 1896). Ecco il risultato del prof. Levi-Civita: *Se due varietà sono geodeticamente applicabili, i loro elementi lineari sono riducibili alla forma*:

$$(1)\qquad \sum_{l=1}^{n-m+1}\left[\Pi'_j(\psi_{p_j}-\psi_{p_l})\sum_{r,s=p_{l-1}+1}^{p_l}\mathrm{K}_{rs}\,dx_r\,dx_s\right]$$

$$(2)\qquad ds^2=\frac{1}{(\alpha\psi_{p_1}+\beta)(\alpha\psi_{p_2}+\beta)\dots(\alpha\psi_{p_{n-m+1}}+\beta)}\sum_{l=1}^{n-m+1}\frac{1}{\alpha\psi_{p_l}+\beta}\times$$
$$\times\left[\Pi'_j(\psi_{p_j}-\psi_{p_l})\sum_{r,s=p_{l-1}+1}^{p_l}\mathrm{K}_{rs}\,dx_r\,dx_s\right].$$

Il significato dei varî simboli è il seguente:

I numeri $p_1, \dots, p_{n-m+1}$ sono numeri interi positivi posti in ordine crescente; $p_0$ è uguale a zero; $m$ è un intero minore dell'intero $n$; $\alpha, \beta$ sono costanti arbitrarie. La $\psi_{p_l}$ è funzione di $x_{p_l}$ se $p_{l-1}+1=p_l$; se invece $p_l > p_{l-1}+1$, la $\psi_{p_l}$ è una costante. Le $\mathrm{K}_{rs}$, dove $r, s$ sono indici compresi tra $p_{l-1}+1$ e $p_l$ sono funzioni qualsiasi di $x_{p_{l-1}+1}, x_{p_{l-1}+2}, \dots, x_{p_l}$. Se $p_l = p_{l-1}+1$, allora di tali $\mathrm{K}_{rs}$ havvene una sola, a cui si può dare il valore 1.

Infine nei fattoriali $\Pi'_j(\psi_{p_j}-\psi_{p_l})$, $j$ percorre tutti i valori $1, 2, \dots, n-m+1$, eccetto che il valore $j=l$.

2. A un elemento lineare del tipo (1) noi daremo il nome di elemento lineare di Levi-Civita.

Una questione intimamente connessa alla precedente è la seguente: *Trovare tutte le varietà geodeticamente applicabili su una varietà* (1) *di Levi-Civita*. È evidente, per quanto abbiamo detto, che questa questione è equivalente alla seguente: *Dato un elemento lineare* (1), *si riconosca se esistono dei cambiamenti di variabili coordinate, che trasformino l'elemento* (1) *di Levi-Civita in un altro elemento lineare pure di Levi-Civita, e, in caso affermativo, si determinino tutti questi cambiamenti di variabili.*

È infatti ben chiaro che a ogni riduzione di un elemento lineare (1) al tipo di Levi-Civita corrisponde, per il teorema precedente, una classe di elementi lineari (varietà) geodeticamente applicabili su (1).

Questa questione è importante per la teoria dei sistemi olonomi, e per la teoria delle geodetiche: essa fu risoluta nel modo più brillante dal Königs per il caso della superficie (varietà a due dimensioni) (cfr. la Nota di Konigs nel 4° volume della *Théorie des surfaces* di G. Darboux) [1]. Noi ora risolveremo in due modi lo stesso problema per gli spazî a $r$ dimensioni ($r > 2$), usando altri metodi, e di più *caratterizzeremo invariantivamente gli spazî del tipo* (1): i risultati sono semplicissimi. Cominceremo dal caso $r = 3$; gli elementi di Levi-Civita sono di uno dei tipi:

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} ds^2 &= (\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)\, dx_1^2 + (\psi_2 - \psi_1)(\psi_2 - \psi_3)\, dx_2^2 + \\ &\quad + (\psi_3 - \psi_1)(\psi_3 - \psi_2)\, dx_3^2 \\ ds^2 &= (\psi_1 - h)\, dx_1^2 + (h - \psi_1)(\mathrm{E}\, dx_2^2 + 2\,\mathrm{F}\, dx_2\, dx_3 + \mathrm{G} dx_3^2)\,, \end{aligned}$$

dove $\psi_i$ è funzione di $x_i$, $h$ è costante, $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ sono funzioni di $x_2, x_3$. Il secondo di questi elementi lineari si può con un cambiamento di coordinate ridurre al tipo:

$$\text{(B)} \qquad ds^2 = dx_1^2 + \psi_1\, \mu (dx_2^2 + dx_3^2)$$

dove $\mu$ è funzione di $x_2, x_3$.

Indicherò al solito con $(ij, lk)$ $(i, j, l, k = 1, 2, 3)$ i noti simboli a quattro indici di prima specie di Riemann. Come è noto, essi sono nulli, se $i = j$, oppure $l = k$; essi cambiano di segno, permutando $i$ con $j$, o $l$ con $k$; è infine $(ij, lk) = (lk, ij)$. Tanto per l'elemento (A), quanto per l'elemento (B) è $(21, 23) = (31, 32) = (21, 23) = 0$; quindi affinchè in ogni punto la varietà sia a curvatura costante $k$, è necessario e sufficiente che:

$$\text{(3)} \quad (12, 12) - k a_{11} a_{22} = (23, 23) - k a_{22} a_{33} = (31, 31) - k a_{33} a_{11} = 0\,.$$

In tal caso, per un teorema di Schur, *$k$ è una costante effettiva.* Con $a_{ik}$ indico al solito il coefficiente di $dx_i\, dx_k$ in (A) o in (B). Esista ora un cambiamento di variabili, che porti (A) o (B) in un elemento lineare del tipo (A) o (B). Indichiamo con $y_i$, con $b_{ik}$, con $(ji, lk)_y$ le nuove varia-

[1] In questo caso l'elemento (1) si riduce a un elemento lineare di Liouville $ds^2 = (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$ ($\mathrm{U}_i$ funzione di $x_i$). Si potrebbe dare il nome di elementi di Liouville agli elementi $ds^2 = \sum\limits_i \mathrm{U}_i \sum\limits_k dx_k^2$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ ($\mathrm{U}_i$ funzione di $x_i$) e chiedere quando esiste una trasformazione di coordinate che muta un elemento di Liouville in un altro di Liouville. La questione si risolve nel modo più semplice, osservando che una tale trasformazione dovrebbe essere una trasformazione conforme per l'elemento lineare euclideo $\sum dx_k^2$ (questa condizione non è evidentemente sufficiente).

bili, i nuovi coefficienti, i nuovi simboli a 4 indici del nuovo elemento lineare. Porrò poi

$$(i\,,j)=\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\,,\quad \binom{ij}{lk}=\frac{\partial(x_i\,,x_j)}{\partial(y_l\,,y_k)}=\begin{pmatrix}(il)\,(ik)\\(jl)\,(jk)\end{pmatrix}\quad (i\,,j\,,l\,,k=1\,,2\,,3).$$

Indicherò con J l'Jacobiano, certamente non nullo, delle $x$ rispetto alle $y$. È ben noto che

$$(ij\,,lk)_y=\sum_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\alpha\beta\,,\gamma\delta)\,(\alpha\,,i)\,(\beta\,,j)\,(\gamma\,,l)\,(\delta\,,k). \tag{4}$$

Di più, poichè $b_{ik}=0$ per $i\neq k$, avremo che:

$$a_{11}(1\,,i)\,(1\,,k)+a_{22}(2\,,i)\,(2\,,k)+a_{33}(3\,,i)\,(3\,,k)=0 \qquad (i\,,k=1\,,2\,,3\,;\ i\neq k). \tag{5}$$

Sostituendo in (4) a $(ij\,,lk)_y$ successivamente i simboli $(21\,,23)_y\,,(31\,,32)_y$, che sono chiaramente nulli, e ricordando le relazioni, accennate più sopra tra i simboli $(\alpha\beta\,,\gamma\delta)$ avremo che:

$$0=\left[(23\,,23)\binom{23}{23}\right]\binom{23}{12}+\left[(31\,,31)\binom{31}{23}\right]\binom{31}{12}+ +\left[(12\,,12)\binom{12}{23}\right]\binom{12}{12} \tag{6}$$

$$0=\left[(23\,,23)\binom{23}{23}\right]\binom{23}{13}+\left[(31\,,31)\binom{31}{23}\right]\binom{31}{13}+ +\left[(12\,,12)\binom{12}{23}\right]\binom{12}{13}. \tag{7}$$

Confrontando le (6), (7) con le identità

$$(1\,,1)\binom{23}{1\,t}+(2\,,1)\binom{31}{1\,t}+(3\,,1)\binom{12}{1\,t}=0\quad (t=2\,,3)\ ^{(1)}$$

otteniamo tosto, poichè $J\neq 0$:

$$(23\,,23)\binom{23}{23}:(31\,,31)\binom{31}{23}:(12\,,12)\binom{12}{23}=(1\,,1):(2\,,1):(3\,,1).$$

Siccome poi le $(1\,,1)\,,(2,1)\,,(3\,,1)$ non possono essere contemporaneamente nulle (perchè $J\neq 0$), potremo quindi scrivere:

$$(23\,,23)\binom{23}{23}=\varrho_1(1\,,1)\,;\ (31\,,31)\binom{31}{23}=\varrho_1(2\,,1)\,; \tag{8}$$

$$(12\,,12)\binom{12}{23}=\varrho_1(3\,,1)$$

(1) Queste due equazioni costituiscono, si ricordi, due relazioni *distinte* tra le $(k,1)$ $(k=1\,,2\,,3)$; chè, se ciò non fosse, sarebbe (per noti teoremi sui determinanti) $J=0$.

dove $\varrho_1$ è una quantità finita. Poniamo ora nella (5) successivamente $i=1$, $k=2$ e $i=1$, $k=3$. Otterremo, risolvendo le equazioni così ottenute rispetto alle $a_{ii}(i, 1)$, che

$$(9) \qquad a_{11}(1,1)=\sigma_1\binom{23}{23}\,;\; a_{22}(2,1)=\sigma_1\binom{31}{23}\,;\; a_{33}(3,1)=\sigma_1\binom{12}{23}$$

dove $\sigma_1$ è un fattore di proporzionalità, nè nullo, nè infinito. (Se $\sigma_1=0$ sarebbe $(1,1)=(2,1)=(3,1)=0$ e quindi $J=0$; se $\sigma_1=\infty$ sarebbero nulli i minori $\binom{23}{23}, \binom{31}{31}, \binom{12}{23}$ e quindi $J=0$). Ricordando questo fatto, confrontando le (8), (9) e osservando che certamente $a_{ii}\neq 0$, otteniamo:

$$(10) \qquad [a_{11}(23,23)-\varrho_1\sigma_1](1,1)=[a_{22}(31,31)-\varrho_1\sigma_1](2,1)= \\ =[a_{33}(12,12)-\varrho_1\sigma_1](3,1)=0.$$

Valgono evidentemente equazioni analoghe, che si ottengono rotando gli indici 1, 2, 3.

3. Per comodità di discorso, noi diremo elemento (B) un elemento, che si possa considerare insieme del tipo (A) e del tipo (B). Noi escluderemo senz'altro che l'elemento considerato sia *a curvatura costante*: questo caso non c'interessa per nulla, perchè è ben noto, da teoremi del Beltrami, che gli spazî applicabili geodeticamente su uno spazio a curvatura costante sono *tutti e soli* gli spazî pure a curvatura costante. Studieremo anzitutto il caso (B); è allora $(12,12)=(31,31)$ e $a_{22}=a_{33}$. Supponiamo dapprima che $(2,1)=(3,1)=0$; allora, poichè $J\neq 0$, sarà $(1,1)\neq 0$; e, poichè $a_{11}\neq 0$, avremo dalle (5) [dove si faccia successivamente $i=1$, $k=2$ e $i=1$, $k=3$] che $(1,2)=(1,3)=0$.

Sarà quindi $x_1=x_1(y_1)$; $x_2=x_2(y_3, y_3)$; $x_3=x_3(y_2, y_3)$. Una tale trasformazione non può portare un elemento (B) in un elemento di tipo (A), ma soltanto in un elemento di tipo (B): ciò che avviene soltanto se $x_1=\pm y_1+\text{cost}$ e se la $x_2=x_2(y_2, y_3)$, $x_3=x_3(y_2, y_3)$ è una trasformazione conforme per $dx_2^2+dx_3^2$.

Ponendo $x_1=z_1$, $x_2+ix_3=z_2$, $x_2-ix_3=z_3$, potremo dire che la nostra trasformazione deve intanto trasformare in sè il sistema delle $z_1=\text{cost}$, $z_2=\text{cost}$, $z_3=\text{cost}$.

Supponiamo ora che almeno una delle $(2,1)$ $(3,1)$ non sia nulla; supponiamo p. es. che $(2,1)\neq 0$. Per le (10) sarà $a_{22}(31,31)=\varrho_1\sigma_1$. Se fosse anche $a_{11}(23,23)=\varrho_1\sigma_1$, allora, poichè $a_{22}(31,31)=a_{33}(21,21)$, sarebbero soddisfatte le (3), dove si ponesse $k=\dfrac{\varrho_1\sigma_1}{a_{11}a_{22}a_{33}}$; e quindi noi saremmo nel caso escluso di spazî a curvatura costante. È perciò $a_{11}(23,23)\neq\varrho_1\sigma_1$; e quindi, per le (10), sarà $(1,1)=0$. Poichè $J\neq 0$, almeno una delle

$(1, 2)$, $(1, 3)$ è differente da zero. Sia p. es. $(1, 2) \neq 0$. Sostituendo nelle (10) gli indici $2, 3, 1$ agli indici $1, 2, 3$, otterremo:

$$(10^{bis}) \quad 0 = [a_{11}(23, 23) - \varrho_2 \sigma_2](1, 2) = [a_{22}(31, 31) - \varrho_2 \sigma_2](2, 2) = \\ = [a_{33}(12, 12) - \varrho_3 \sigma_3](3, 2).$$

E quindi sarà $a_{11}(23, 23) = \varrho_2 \sigma_2$. Ma poichè, come dicemmo, $a_{11}(23, 23) \neq a_{22}(12, 12)$, avremo che $(2, 2) = 0$ e analogamente $(3, 2) = 0$. Se ora fosse anche $(1, 3) \neq 0$, si dimostrerebbe analogamente che $(2, 3) = (3, 3) = 0$ e se ne trarrebbe $J = 0$. È dunque $(1, 3) = 0$ e la nostra trasformazione è del tipo: $x_1 = x_1(y_2)$ ; $x_2 = x_2(y_1, y_3)$ ; $(l = 2, 3)$. Essa non può chiaramente portare un elemento (B) in un elemento (A); se essa portasse l'elemento (B) in un altro elemento di tipo (B), sarebbe:

$$(11) \quad (2, 1)(2, 3) + (3, 1)(3, 3) = 0 \ ; \ (2, 1)^2 + (3, 1)^2 = 1 \ ; \\ (1, 2)^2 = (2, 3)^2 + (3, 3)^2 .$$

Poichè $(1, 1) = 0$, $J \neq 0$, almeno una delle $(2, 1)$, $(3, 1)$ non è nulla: quindi per la prima delle (11) traggiamo (indicando con $\lambda$ una costante finita):

$$(12) \quad (3, 3) = \lambda(2, 1) \ ; \ (2, 3) = -\lambda(3, 1).$$

L'ultima delle (11) diventa in virtù della seconda delle (11) e delle (12) $\lambda^2 = (1, 2)^2$. Dunque $\lambda$ è funzione soltanto di $y_2$ e quindi [per le (12)] essa è una costante effettiva. L'elemento trasformato di (B) è perciò $dy_1^2 + \lambda^2(dy_2^2 + dy_3^2)$ ($\lambda = \text{cost}$), ed è perciò euclideo; altrettanto avverrebbe quindi di (B): ciò che noi abbiamo già escluso dalle nostre ricerche.

4. Studieremo ora il caso (A). È fondamentale l'osservazione:

*I simboli* $(21, 23)$, $(31, 32)$, $(12, 13)$ *sono nulli; la quantità* $a_{ii}[a_{jj}(ik, ik) - a_{kk}(ij, ij)]$ $(i \neq j \neq k)$ *è simmetrica negli indici* $1, 2, 3$ (come dimostra il calcolo effettivo); *cosicchè, se* $a_{11}(23, 23) = a_{22}(31, 31)$, *è anche* $a_{33}(12, 12) = a_{11}(23, 23)$ *e quindi sono verificate le* (3), *ossia lo spazio è a curvatura costante.*

Escluso questo caso, le $a_{11}(23, 23) - \varrho_1 \sigma_1$, $a_{22}(31, 31) - \varrho_1 \sigma_1$, $a_{33}(12, 12) - \varrho_1 \sigma_1$ sono a due a due distinte: una sola è quindi al massimo uguale a zero; e quindi per le (10) almeno due delle $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ sono nulle. Così pure almeno due delle $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$ e almeno due delle $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$ sono nulle. Poichè $J \neq 0$, ne traggiamo subito che la nostra trasformazione si riduce a una permutazione delle schiere di superficie $x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$, $x_3 = \text{cost}$. Convenendo di dire che per (A) le $x_i = \text{cost}$ e per B le $z_i = \text{cost}$ (cfr. § 3) formano un sistema di Levi-Civita, potremo riassumere i nostri risultati nel modo seguente:

*Una varietà a tre dimensioni, che contiene più di un sistema di Levi-Civita è a curvatura costante; escluso questo caso, una trasformazione, che porti un sistema di Levi-Civita in un sistema di Levi-Civita può al massimo soltanto permutare le tre schiere di superficie, che costituiscono il sistema.*

Ora, perchè uno spazio V a tre dimensioni, che ammette un gruppo G geodetico, contiene un sistema di Levi-Civita (¹), trasformato da almeno una trasformazione di G in un sistema pure di Levi-Civita, avremo: *Un tale spazio* V, *o è a curvatura costante, o possiede uno e un solo sistema di Levi-Civita, invariante per il gruppo* G. Questo è il teorema fondamentale della mia Mem. citata.

5. Interpetreremo ora geometricamente le nostre considerazioni. Il primo teorema del § 4 ci dice in sostanza: *Per uno spazio* (A) *le linee coordinate* $x_1, x_2, x_3$ *formano le tre conguenze principali* (nel senso di Schur e Ricci); *le curvature principali corrispondenti sono a due a due distinte, se lo spazio non è a curvatura costante.*

Cor. I). Ne discende tosto *che* (esclusi gli spazî a curvatura costante) *uno spazio* (A) *non può possedere più di due sistemi di Levi-Civita del tipo* (A), *perchè* (essendo le curvature principali a due a due distinte) *le congruenze principali sono determinate.*

Cor. II). *Affinchè una metrica sia riducibile al tipo* (A) *è condizione necessaria e sufficiente che essa sia a curvatura costante* (nel qual caso le $x_i =$ cost formano un sistema di quadriche confocali (cfr. loc. cit.)) *oppure che le curvature principali siano a due distinte, le congruenze principali siano normali, e,* assunte come linee coordinate, *diano all'elemento lineare precisamente la forma* (A). Queste condizioni sono *invariantive* si possono facilmente scrivere coi simboli del prof. Ricci.

*Uno spazio* B invece *ha uguali due delle curvature principali: esso non può quindi essere riducibile al tipo* (A), *se non è a curvatura costante. Le congruenze principali non sono quindi univocamente determinate; ma invece le* $z_1 =$ cost, $z_2 =$ cost, $z_3 =$ cost *sono determinate senza ambiguità. Perciò anche uno spazio* (B) *non contiene più di un sistema di Levi-Civita. Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio sia riducibile al tipo* B, *è che una terna di congruenze principali si possa assumere come terna di congruenze coordinate, e che l'elemento lineare diventi in tal guisa del tipo* (B). Anche questa è una condizione *invariantiva.* Dello sviluppo dei concetti precedenti per il caso di spazî a più che 3 dimensioni io mi occuperò in un'altra Nota.

(¹) Cfr. la Mem. dell'A.: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche,* Mem. dell'Accademia di Torino, 1903.