ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Matematica. — *Sulle superficie* W [1] *applicabili sopra superficie di rotazione.* Nota del dott. ARCADIO TAGLIAFERRI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Riferendo la superficie generica di questa classe che noi vogliamo studiare al sistema isotermo $(u\,v)$ formato dalle deformate dei meridiani e dei paralleli, potremo supporre, come è noto, l'elemento lineare ridotto alla forma:

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

dove λ è una funzione della sola u.

Calcolando la curvatura assoluta otterremo:

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 \log \lambda}{du^2}, \tag{2}$$

quindi K sarà funzione di u soltanto.

Come è noto, per ogni superficie W dovrà essere soddisfatta identicamente la relazione:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u}, \tag{3}$$

dove H e K indicano rispettivamente la curvatura media e quella assoluta della superficie W; ed u e v sono due variabili indipendenti qualunque.

Nel caso nostro la (3) diviene:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v} = 0, \tag{4}$$

cioè H funzione della sola u.

Prendiamo le equazioni di Codazzi:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\mathfrak{D} + \left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\mathfrak{D}' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\mathfrak{D}'' = 0\\ &\frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\mathfrak{D} + \left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\mathfrak{D}' - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\mathfrak{D}'' = 0.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

[1] Come è noto, si indicano col nome di *superficie* W quelle superficie i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro.

Osservando che nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{du}\,,\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=0\,,$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{du}\,,$$

le (5) si riducono alle seguenti:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{D}}{\partial v}-\dfrac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial u}=0 \\ \dfrac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial v}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d\lambda}{du}\mathfrak{D}-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d\lambda}{du}\mathfrak{D}''=0. \end{cases}$$

Dall'equazione di Gauss e dall'espressione della curvatura media ricaviamo le due relazioni:

$$(7)\qquad \mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2=\mathrm{K}\lambda^2,$$

$$(8)\qquad \mathfrak{D}+\mathfrak{D}''=-\lambda^2\mathrm{H}.$$

Ora, come abbiamo osservato poco prima, H e K e così pure la quantità λ sono funzioni della sola u, se dunque si pone:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D}=\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos\omega \\ \mathfrak{D}'=\mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\omega \\ \mathfrak{D}''=\mathrm{A}-\mathrm{B}\cos\omega \end{cases}$$

$\left(\text{dove } \mathrm{A}=-\dfrac{\mathrm{H}\lambda^2}{2} \text{ e } \mathrm{B}^2=\left(\dfrac{\mathrm{H}^2}{4}-\mathrm{K}\right)\lambda^4\right)$ anche A e B saranno funzioni della sola u, mentre ω sarà generalmente funzione di u e di v.

Dall'equazione differenziale delle linee di curvatura:

$$du^2-2\,\mathrm{cotg}\,\omega\,du\,dv-dv^2=0\,,$$

si riconosce subito che ω rappresenta il doppio dell'angolo che un sistema di linee di curvatura formano colle linee $v=\text{cost.}$ Eliminando $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ dall'equazione (7) mediante le (9) e ponendo inoltre per K il suo valore dato dalla (2) avremo:

$$(10)\qquad \frac{\lambda^2 d^2\log\lambda}{du^2}=\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2\,.$$

Dalle (9) ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial v} &= -\,\mathrm{B}\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial u} &= \operatorname{sen}\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}+\mathrm{B}\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\,,\\
\frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial v} &= \mathrm{B}\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial \mathfrak{D}''}{\partial u} &= \frac{d\mathrm{A}}{du}-\cos\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}+\mathrm{B}\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo nelle (6):

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}\left(\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}+\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=-\operatorname{sen}\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}\\
&\mathrm{B}\left(\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}-\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\cos\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}+\frac{2\mathrm{A}}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{du}-\frac{d\mathrm{A}}{du}
\end{aligned}\right.$$

ovvero:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}\left(\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}+\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=-\operatorname{sen}\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}\,,\\
&\mathrm{B}\left(\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}-\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)=\cos\omega\,\frac{d\mathrm{B}}{du}-\lambda^2\,\frac{d\,\dfrac{\mathrm{A}}{\lambda^2}}{du}\,.
\end{aligned}\right.$$

Poniamo:

$$\mathrm{B}=\varphi\lambda\quad,\quad \mathrm{A}=-\,\delta\lambda^2\,,$$

donde si riconosce facilmente che δ è la metà della curvatura media.

La (10) diviene:

$$(13)\qquad \frac{d^2\log\lambda}{du^2}=\varphi^2-\lambda^2\delta^2\,,$$

e le (12) si scriveranno:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}+\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}=\operatorname{sen}\omega\,\frac{d\log\lambda\varphi}{du}\\
&\operatorname{sen}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial u}-\cos\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial v}=\cos\omega\,\frac{d\log\lambda\varphi}{du}+\frac{\lambda}{\varphi}\,\frac{d\delta}{du}\,,
\end{aligned}\right.$$

dalle quali ricaviamo facilmente:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{\lambda}{\varphi}\,\frac{d\delta}{du}\operatorname{sen}\omega\\
&\frac{\partial\omega}{\partial v}=-\frac{d\log\lambda\varphi}{du}-\frac{\lambda}{\varphi}\,\frac{d\delta}{du}\cos\omega.
\end{aligned}\right.$$

Ora, esprimendo la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

otterremo:

$$(16)\qquad \left\{\frac{\lambda}{\varphi}\frac{d\delta}{du}\frac{d\log\lambda\varphi}{du}-\frac{d}{du}\left(\frac{\lambda}{\varphi}\frac{d\delta}{du}\right)\right\}\cos\omega+\left(\frac{\lambda}{\varphi}\frac{d\delta}{du}\right)^2-\frac{d^2\log\lambda\varphi}{du^2}=0\,.$$

In generale questa equazione per un medesimo sistema di valori di λ, δ, φ fornisce un solo valore di $\cos\omega$, ed affinchè il problema ammetta soluzioni deve questo valore soddisfare le (15).

A meno che la (16) non sia una identità in $\cos\omega$ nel qual caso le (5) integrate forniscono per ω una funzione contenente una costante arbitraria.

Nel caso in cui la (16) sia identicamente soddisfatta in $\cos\omega$; la superficie ammette una deformazione continua in cui rimane costante la curvatura media δ, ed il problema si riduce a quello risoluto dal Bonnet [1].

Se l'equazione (16) non si riduce ad una identità, ci resta ancora da esaminare il caso in cui il valore di $\cos\omega$ ricavato da questa equazione possa soddisfare alle (15); in questo caso essendo ω funzione di u soltanto anche $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ saranno funzioni della sola u, e quindi le superficie saranno elicoidi, e reciprocamente ogni superficie elicoidale è una superficie W applicabile sopra una superficie di rotazione.

Come conclusione di questo breve studio possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Le uniche superficie applicabili sopra superficie di rivoluzione, e coi raggi principali di curvatura funzioni l'uno dell'altro, sono le superficie elicoidali e quelle superficie, determinate dal Bonnet, che ammettono una deformazione continua, nella quale restano invariati i raggi principali di curvatura.

Fisica. — *Acumetro telefonico a solenoide neutro.* Nota di ANNIBALE STEFANINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Journal de l'École Polytechnique, 42e Cahier, 1867, pag. 72.