ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Fisica matematica. — *Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato.* Nota del prof. G. LAURICELLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Sia f la funzione densità di un doppio strato W distribuito su di una superficie S, la quale superficie soddisfi alle seguenti condizioni:

1°. Ammette un piano tangente determinato in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°. Esiste una lunghezza fissa D tale che, preso un punto p qualsiasi di S e considerato il cilindro circolare di raggio D, avente per asse la normale alla superficie in questo punto, la porzione S_D di S interna a questo cilindro sia incontrata in un punto al più dalle parallele alla detta normale;

3°. Esiste un numero fisso positivo a tale che, indicando con ϑ l'angolo acuto che la normale in p fa con la normale in un altro punto qualsiasi p' e indicando con r la distanza pp', si abbia:

$$\vartheta < ar .$$

Si consideri un punto arbitrario p_0 di S; si riferiscano i punti dello spazio ad una terna (x, y, z) di assi cartesiani ortogonali con l'origine nel punto p_0 e di cui l'asse z coincida con la normale ad S nel punto p_0; si indichi con f_0 il valore della funzione f nel punto p_0; e si ponga:

$$x = \varrho \cos\psi \quad , \quad y = \varrho \operatorname{sen}\psi \quad ; \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho\, , \psi)\, d\psi = \bar{f} .$$

Il sig. Liapounoff nella sua importante Memoria (¹): *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet*, dimostra l'esistenza della derivata normale del doppio strato W nel punto p_0, supposto che la funzione f sia finita e continua e che inoltre soddisfaccia alla condizione:

$$(1) \qquad |\bar{f} - f_0| < b\varrho^{\beta+1}$$

con b, β numeri positivi indipendenti da ϱ.

L'importanza di questo risultato consiste nel fatto che la condizione sufficiente (1), posta per la funzione f, non riguarda i possibili prolungamenti di essa funzione in uno spazio circostante la superficie S, contrariamente a quanto capita in altre dimostrazioni della esistenza della derivata normale di W; però essa condizione, almeno per la forma sotto cui si pre-

(¹) Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. 5ª, t. IV, 1898.

senta, è tale che difficilmente può venire utilizzata. Il metodo, che qui vado ad esporre, conduce a *dimostrare l'esistenza della derivata normale di* W, *ammesso che la funzione f dei punti di* S *sia finita e continua insieme alle sue derivate prime rispetto ai parametri u e v di un sistema di coordinate curvilinee qualunque su* S, *ma tale che le sue linee ammettano una tangente determinata in ogni punto variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto, e che le derivate seconde di f rispetto ai detti parametri siano finite ed atte all'integrazione* (¹).

2. Sia $P_0 \equiv (0, 0, \zeta)$ un punto situato sulla normale in p_0, $M \equiv (x, y, z)$ un punto arbitrario di S_D; ϑ_0 l'angolo acuto delle due normali in p_0 e in un altro punto p qualsiasi di S_D. In forza delle condizioni poste per la superficie S, la z del punto variabile M sarà funzione univalente finita e continua di x, y e inoltre si avrà (²), indipendentemente dalla posizione di p_0,

$$1 - \cos\vartheta_0 < 2a^2\varrho^2 \quad , \quad |z| < 2a\varrho^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right| < 4a\varrho . \tag{2}$$

Siano ancora: Φ l'angolo che la normale n in un punto p qualsiasi di S_D fa con la direzione pP_0; Φ_0 l'angolo che la normale in p_0 fa con la direzione $P_0 p$; φ ciò che diviene Φ per $\zeta = 0$; e si ponga:

$$R_0^2 = \varrho^2 + (z - \zeta)^2 \quad , \quad r_0^2 = \varrho^2 + z^2 .$$

Supposto di avere fissata la lunghezza D (ciò che può sempre farsi) in modo che sia $1 - 2a^2 D^2 > 0$; in forza della continuità della funzione f in in tutti i punti di S, data una quantità positiva arbitrariamente piccola σ, si può determinare un segmento δ non superiore a D e tale che, indicando con S_δ la porzione di S interna al cilindro circolare di raggio δ, avente per asse la normale nel punto p_0, si abbia nel campo S_δ, indipendentemente dalla scelta di p_0,

$$|f - f_0| \leq \frac{(1 - 2a^2 D^2)\sigma}{8\pi(12\, a^3 D^2 + 56\, a^2 D + 12\, a)} .$$

Ora si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_S \frac{d}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{R_0}}{dn} (f - f_0)\, dS = \int_{S-S_\delta} \frac{d}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{R_0}}{dn} (f - f_0)\, dS + \\ &\quad + \int_{S_\delta} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{R_0}}{dn} + \frac{d^2\frac{1}{R_0}}{dn^2} \right\} (f - f_0)\, dS - \int_{S_\delta} \frac{d^2\frac{1}{R_0}}{dn^2} (f - f_0)\, dS ; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(¹) Condizioni meno restrittive si possono enunciare, come sarà osservato nel seguito.

(²) Cfr.: Liapounoff, loc. cit., §§ 1 e 20.

ed è chiaro che, fissato δ, si può fissare un segmento positivo η' tale che per $|\zeta'|$, $|\zeta''|$ inferiori ad η' si abbia:

$$(4)\qquad \left|\int_{S-S_\delta}\left\{\left(\frac{d}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{R_0}}{dn}\right)_{\zeta=\zeta'}-\left(\frac{d}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{R_0}}{dn}\right)_{\zeta=\zeta''}\right\}(f-f_0)\,dS\right|<\frac{\sigma}{4}.$$

Si ha ancora:

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{R_0}}{dn}+\frac{d^2\frac{1}{R_0}}{dn^2}=\frac{\cos\vartheta_0+3\cos\Phi\cos\Phi_0}{R_0^3}-\frac{1-3\cos^2\Phi}{R_0^3}=$$

$$=\frac{(\cos\vartheta_0-1)+3\cos\Phi(\cos\Phi_0+\cos\Phi)}{R_0^3};$$

e poichè [1]:

$$\cos\Phi=\frac{1}{R_0}\{r_0\cos\varphi+\zeta\cos\vartheta_0\}=\frac{1}{R_0}\left\{\left(\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}-z\right)\cos\vartheta_0+\zeta\cos\vartheta_0\right\}=$$

$$=\frac{\cos\vartheta_0}{R_0}\left\{\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}-(z-\zeta)\right\},$$

$$\cos\Phi_0+\cos\Phi=\frac{z-\zeta}{R_0}+\frac{\cos\vartheta_0}{R_0}\left\{\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}-(z-\zeta)\right\}=$$

$$=\frac{z-\zeta}{R_0}(1-\cos\vartheta_0)+\frac{\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos\vartheta_0}{R_0},$$

risulterà:

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{R_0}}{dn}+\frac{d^2\frac{1}{R_0}}{dn^2}=\frac{\cos\vartheta_0-1}{R_0^3}+$$

$$+\frac{3\cos\vartheta_0}{R_0^5}\left\{\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}-(z-\zeta)\right\}\left\{(z-\zeta)(1-\cos\vartheta_0)+\varrho\frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos\vartheta_0\right\}.$$

In questo modo, osservando che è:

$$R_0\geq\varrho\;,\quad R_0\geq|z-\zeta|,$$

potremo scrivere:

$$\left|\frac{d}{d\zeta}\frac{d\frac{1}{R_0}}{dn}+\frac{d^2\frac{1}{R_0}}{dn^2}\right|<\frac{2a^2}{\varrho}+3\left\{4a+\frac{|z-\zeta|}{R_0^2}\right\}\left\{2a^2+\frac{4a}{R_0}\right\}<$$

$$<24\,a^3+56\,\frac{a^2}{\varrho}+12\,a\frac{|z-\zeta|}{R_0^3};$$

[1] Cfr. Liapounoff, loc. cit., § 20.

e quindi, indicando con ϱ' i valori di ϱ corrispondenti ai punti del contorno della proiezione di S_δ sul piano tangente in p_0 ed avendo riguardo alla disuguaglianza:

$$\cos \vartheta_0 > 1 - 2a^2 \varrho^2 \geq 1 - 2a^2 D^2,$$

risulterà per qualunque valore non nullo di ζ:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \int_{S_\delta} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \frac{d \frac{1}{R_0}}{dn} + \frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} \right\} (f - f_0)\, dS \right| = \left| \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varrho'} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \frac{d \frac{1}{R_0}}{dn} + \frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} \right\} \frac{(f - f_0)\, \varrho\, d\varrho}{\cos \vartheta_0} \right| < \\ &< \frac{\sigma}{4(12a^3 D^2 + 56 a^2 D + 12 a)} \left\{ 24 a^3 \int_0^{\varrho'} \varrho\, d\varrho + 56 a^2 \int_0^{\varrho'} d\varrho + 12 a \int_0^{\varrho'} \frac{|z - \zeta|\, \varrho\, d\varrho}{R_0^3} \right\} < \frac{\sigma}{4}. \end{aligned} \right.$$

È utile osservare che, data σ ad arbitrio, la (5) vale indipendentemente dalla posizione del punto p_0 su S, e il segmento η' si può fissarlo in modo chè anche la (4) valga indipendentemente dalla posizione di p_0.

3. Dalla condizione 3ª posta per la superficie S risulta che, fissato un valore qualsiasi di ζ diverso dallo *zero* e preso un punto p generico di S (che potrebbe anche essere il punto p_0), si può considerare nello spazio un intorno del punto p talmente piccolo che il punto P_0 risulti esterno a questo intorno e che da un punto M qualsiasi di detto intorno si possa condurre alla porzione di superficie S, interna all'intorno stesso, una normale n ed una solamente; allora, fissando la direzione positiva di tale normale, potremo al punto M, qualunque esso sia, far corrispondere sempre un determinato valore (positivo, negativo o nullo) del parametro n ed il sistema (u, v) dei valori delle coordinate sopra S del piede della normale da esso condotta; in questo modo la posizione del punto M dell'intorno di p risulterà determinata dalle coordinate curvilinee u, v, n.

Ora se indichiamo con $\Delta^2 \Psi$ il parametro differenziale di 2° ordine di una funzione Ψ delle variabili u, v, n e con $\Delta'^2 \Psi$ il parametro differenziale di 2° ordine di Ψ rispetto alle sole variabili u, v si ha, come è facile verificare,

$$\Delta^2 \Psi = \Delta'^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dn^2};$$

e poichè:

$$0 = \Delta^2 \frac{1}{R_0} = \Delta'^2 \frac{1}{R_0} + \frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2},$$

così avremo in particolare nel punto p di S_δ:

$$\frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} = -\Delta'^2 \frac{1}{R_0};$$

e quindi si potrà scrivere per ζ diversa da *zero*:

$$\int_{S_\delta} \frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} (f - f_0)\, dS = -\int_{S_\delta} (f - f_0)\, \Delta^2 \frac{1}{R_0}\, dS.$$

Allora, indicando con s la linea contorno di S_δ e con ν la normale su S_δ alla linea s diretta verso l'interno dell'area S_δ, rammentando che la funzione f ha le derivate prime rispetto u e v finite e continue e le derivate seconde finite ed atte all'integrazione su S, avremo per qualunque valore non nullo di ζ, in forza della *formola di Green* estesa alle superficie gobbe (1),

$$\int_{S_\delta} \frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} (f - f_0)\, dS = -\int_{S_\delta} \frac{1}{R_0} \Delta^2 f\, dS - \int_s \left\{ \frac{1}{R_0} \frac{\partial f}{\partial \nu} - (f - f_0) \frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial \nu} \right\} ds.$$

Da questa formola risulta che si può fissare, indipendentemente dalla posizione di p_0, un segmento η'' tale che per $|\zeta'|, |\zeta''|$ inferiore ad η'' si abbia:

$$\left| \int_{S_\delta} \left\{ \left(\frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} \right)_{\zeta=\zeta'} - \left(\frac{d^2 \frac{1}{R_0}}{dn^2} \right)_{\zeta=\zeta''} \right\} (f - f_0)\, dS \right| < \frac{\sigma}{4}.$$

Indicando con η il minore dei due segmenti η', η'', e tenendo conto della formola precedente e delle (3), (4), (5), risulterà per $|\zeta'|, |\zeta''|$ inferiori ad η e diverse dallo *zero*:

$$\left| \int_S \left\{ \left(\frac{d}{d\zeta} \frac{d \frac{1}{R_0}}{dn} \right)_{\zeta=\zeta'} - \left(\frac{d}{d\zeta} \frac{d \frac{1}{R_0}}{dn} \right)_{\zeta=\zeta''} \right\} (f - f_0)\, dS \right| < \sigma.$$

Questo risultato ci dice che *l'espressione*:

$$\int_S \frac{d}{d\zeta} \frac{d \frac{1}{R_0}}{dn} (f - f_0)\, dS \tag{6}$$

ammette un limite determinato e finito per $|\zeta| = 0$.

Il fatto poi che il segmento η può essere fissato indipendentemente dalla posizione di p_0 su S, ci porta a concludere che *questo limite rimane lo stesso, quando il punto* P_0, *discosto da* S, *si avvicina a* p_0 *muovendosi*

(1) Cfr. ad es.: Beltrami, *Memoria sulla teorica generale dei parametri differenziali* (Mem. della R. Acc. di Sc. di Bologna, vol. VIII, ser. II).

anche fuori della normale in p_0 e che *la funzione limite è finita e continua su tutta la superficie* S.

Se si osserva finalmente che la proprietà dimostrata per l'espressione (6) vale, come è notorio, per l'altra:

$$\int_S \frac{d}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{R_0}}{dn} dS,$$

ne segue, appunto come si voleva dimostrare [1], che essa proprietà vale ancora per l'espressione:

$$\int_S f \frac{d}{d\zeta} \frac{d\frac{1}{R_0}}{dn} dS$$

4. Il metodo che abbiamo esposto può essere utilmente applicato nelle sue linee generali a studî analoghi. In particolare si può dimostrare che *la funzione* W *ha le derivate prime tangenziali (p. es.:) rispetto* u, v *determinate e finite nel punto* p_0 *e che i valori di queste derivate dalle due facce di* S *differiscono tra di loro* [2] *rispettivamente di* $4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{p=p_0}$, $4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p=p_0}$, *ammesso solo che la funzione* f *abbia le derivate prime tangenziali finite ed atte all'integrazione in tutto un intorno del punto* p_0 *e continue in questo punto.*

Il sig. Liapounoff, al § 21 della sua citata Memoria, dimostra l'esistenza delle derivate tangenziali di W, ammesso che la funzione f si possa considerare come definita dai valori nei punti della superficie S di una funzione F finita e continua insieme alle sue derivate prime e doppie in tutto uno spazio circostante S.

(1) Nell'enunciare al § 1 le condizioni a cui per ipotesi deve soddisfare la funzione f, si era detto che condizioni meno restrittive si possono porre per essa funzione. Per vederlo basterà anzitutto rammentare che le formole (4), (5) richiedono la sola continuità della funzione f, e che per la validità dell'altra *formola di Green* estesa alle superficie gobbe:

$$-\int_{S_\delta} (f-f_0)\, \Delta'^2 \frac{1}{R_0}\, dS = \int_{S_\delta} V\left(\frac{1}{R_0}, f\right) dS + \int_s (f-f_0) \frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial \nu}\, ds,$$

nella quale $V\left(\frac{1}{R_0}, f\right)$ è il parametro differenziale misto delle funzioni $\frac{1}{R_0}$, f, è sufficiente che la f abbia le derivate prime rispetto u e v finite e continue; e notare poi che, con metodo analogo a quello del prof. Morera relativo alle derivate seconde della funzione potenziale di spazio (Rendiconti dell'Istituto Lombardo, ser. II, t. XX), introducendo solo i rapporti incrementali delle derivate prime della funzione f, si può dimostrare l'esistenza di un limite determinato e finito dell'espressione al secondo membro della formola precedente per $|\zeta| = 0$.

(2) Cfr. ad es.: Poincaré, *Théorie du Potentiel Newtonien*, §§ 113, 114.