# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XIV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

**Meccanica.** — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione.* Nota di Orazio Tedone, presentata dal Socio V. Volterra.

1. *Caso in cui sulla superficie sono dati gli spostamenti. Formole introduttorie.* — Ricordiamo che, secondo i principî da noi più volte applicati, se sono noti gli spostamenti superficiali di un corpo elastico, isotropo, deformato, in equilibrio, gli spostamenti $u, v, w$, in un punto interno del corpo stesso, sono dati dalle formole:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,,\\ v &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,y\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,,\\ w &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,z\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,, \end{aligned}\right.$$

supposto noto il valore della funzione armonica $\theta$, inerente al problema, che, com' è noto, rappresenta la dilatazione elementare, e dove: $\sigma$ è la superficie del corpo elastico, $n$ la normale interna, G la ordinaria funzione di Green, $\lambda$ e $\mu$ le solite costanti di Lamé e $\xi, \eta, \zeta$ i valori di $x, y, z$ su $\sigma$. Nella soluzione del problema che ci siamo proposti di esporre rapidamente, non faremo uso del valore effettivo della funzione di Green, ma solo ci serviremo di essa per rappresentare speditamente una funzione armonica che acquista in superficie dati valori. Costruite in un modo qualunque, le (1), nella ipotesi che $\theta$ sia nota, per la completa soluzione del problema, resta da determinare $\theta$ dall'equazione

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{3\lambda+5\mu}{2\mu}\,\theta + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\frac{\partial\theta}{\partial y} + z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) - \\ &- \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}\,d\sigma\right). \end{aligned}\right.$$

Venendo al nostro caso speciale, poniamo l'equazione dell'ellissoide sotto la forma

$$(3)\quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2+z^2}{r^2-1} = h^2$$

dove $r$ e $h$ sono da ritenersi reali se l'ellissoide è allungato, con $|r| > 1$, mentre, se l'ellissoide è schiacciato, $r$ e $h$ sono da ritenersi immaginarî puri. Ponendo ora, in ogni caso:

$$(4)\quad x = h\varrho t\ ,\ y = h\sqrt{(\varrho^2-1)(1-t^2)}\cos\psi\ ,\ z = h\sqrt{(\varrho^2-1)(1-t^2)}\,\mathrm{sen}\,\psi$$

saranno $\varrho$, $t$, $\psi$ un sistema di coordinate curvilinee ortogonali ([1]). Nel caso di un ellissoide allungato, oltre a supporre $h$ reale, faremo anche le ipotesi che $\varrho$ sia reale con $|\varrho| \geq 1$ e che $|t| \leq 1$, mentre, nel caso di un ellissoide schiacciato, oltre alla ipotesi che $h$ sia puramente immaginario, faremo anche le altre ipotesi che anche $\varrho$ sia puramente immaginario e che $|t| \leq 1$. Con queste convenzioni, nel sistema di coordinate $\varrho$, $t$, $\psi$, l'equazione (3) dell'ellissoide, sarà sempre $\varrho = r$.

Se poniamo allora i valori di una qualunque funzione $\varphi$ dei punti della superficie (3), soddisfacente alle note condizioni generali chè qui non staremo ad enunciare, sotto la forma

$$(5)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_i \sum_{i}^{\infty}{}_m (\mathrm{A}_{m,i}\cos i\psi + \mathrm{B}_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\,\mathrm{P}_{m,i}(t)$$

dove

$$\mathrm{P}_{m,i}(t) = (1-t^2)^{\frac{i}{2}}\frac{d^i\,\mathrm{P}_m(t)}{dt^i}\ ,\quad \mathrm{P}_{m,0}(t) = \mathrm{P}_m(t)$$

e le $\mathrm{P}_m(t)$ sono le solite funzioni di Légendre, sarà, com'è noto:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2m+1}\mathrm{A}_{m,0} = \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\tau\, d\omega\, \varphi\, \mathrm{P}_m(t), \\ \dfrac{4\pi}{2m+1}\mathrm{A}_{m,i} = 2\,\dfrac{(m-i)!}{(m+i)!}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\tau\, d\omega\, \varphi\, \mathrm{P}_{m,i}(\tau)\cos i\omega \\ \dfrac{4\pi}{2m+1}\mathrm{B}_{m,i} = 2\,\dfrac{(m-i)!}{(m+i)!}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\tau\, d\omega\, \varphi\, \mathrm{P}_{m,i}(\tau)\,\mathrm{sen}\, i\omega, \end{cases}$$

mentre la funzione $\Phi$ armonica e regolare nell'interno dell'ellissoide che sulla superficie acquista i valori $\varphi$, sarà data dalla formola

$$(7)\qquad \Phi = \sum_{0}^{\infty}{}_i \sum_{i}^{\infty}{}_m (\mathrm{A}_{m,i}\cos i\psi + \mathrm{B}_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\,\frac{\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)}{\mathrm{P}_{m,i}(r)}\,\mathrm{P}_{m,i}(t).$$

In tutti e due i casi in quistione, in quello cioè dell'ellissoide allungato e in quello dell'ellissoide schiacciato, poniamo per convenzione:

$$\sqrt{1-\varrho^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\varrho^2-1}\ ,\quad \sqrt{1-r^2} = \sqrt{-1}\sqrt{r^2-1}.$$

Ne viene allora che, in entrambi questi casi, $\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)$ e $\mathrm{P}_{m,i}(r)$ sono funzioni ben determinate tali che il loro quoziente è reale. Inoltre $\mathrm{P}_{m,i}(r)$ è diverso da zero per qualunque valore di $m$ e di $i$.

([1]) Se stabiliamo dî dare a $\varrho$ soli valori positivi, se è reale, o valori positivi al coefficiente dell'immaginario, se è immaginario, mentre $t$ possa assumere valori positivi e negativi e $\psi$ varî da zero a $2\pi$, ad ogni sistema di valori di $\varrho$, $t$, $\psi$ corrisponderà un solo punto dello spazio, e viceversa.

Per esporre la soluzione del nostro problema nel modo più spedito, notiamo le formole seguenti di cui faremo uso quasi esclusivo e che sono, almeno in parte, ben note:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(1-t^2)\frac{d\mathrm{P}_m(t)}{dt}=(m+1)\left[t\mathrm{P}_m(t)-\mathrm{P}_{m+1}(t)\right],\\
&(2m+1)\,t\mathrm{P}_m(t)=(m+1)\,\mathrm{P}_{m+1}(t)+m\mathrm{P}_{m-1}(t), \qquad t\mathrm{P}_0(t)=\mathrm{P}_1(t)\\
&(2m+1)\,\mathrm{P}_m(t)=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{P}_{m+1}(t)-\mathrm{P}_{m-1}(t)\right], \qquad \mathrm{P}_0(t)=\frac{d\mathrm{P}_1(t)}{dt}
\end{aligned}
\right.
$$

da cui si deducono facilmente le altre:

$$
(8')\quad \left\{
\begin{aligned}
&(1-t^2)\frac{d\mathrm{P}_{m,i}(t)}{dt}=-mt\mathrm{P}_m(t)+(m+i)\,\mathrm{P}_{m-1,i}(t),\\
&(2m+1)\,t\mathrm{P}_{m,i}(t)=(m-i+1)\,\mathrm{P}_{m+1,i}(t)+(m+i)\,\mathrm{P}_{m-1,i}(t),\\
&(2m+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{P}_{m,i}(t)=\mathrm{P}_{m+1,i+1}(t)-\mathrm{P}_{m-1,i+1}(t)=\\
&=-(m-i+1)(m-i+2)\,\mathrm{P}_{m+1,i-1}(t)+(m+i)(m+i-1)\,\mathrm{P}_{m-1,i-1}(t),\\
&t\sqrt{1-t^2}\,\frac{d\mathrm{P}_{m,i}(t)}{dt}=m\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{P}_{m,i}(t)-i\,\frac{\mathrm{P}_{m,i}(t)}{\sqrt{1-t^2}}+\mathrm{P}_{m-1,i+1}(t),\\
&t\sqrt{1-t^2}\,\frac{d\mathrm{P}_{m,i}(t)}{dt}=m\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{P}_{m,i}(t)+i\,\frac{\mathrm{P}_{m,i}(t)}{\sqrt{1-t^2}}-\\
&\qquad\qquad -(m+i)(m+i-1)\,\mathrm{P}_{m-1,i-1}(t),\\
&\frac{\mathrm{P}_{m+2,i}(\varrho)\,\mathrm{P}_{m,i}(t)-\mathrm{P}_{m+2,i}(t)\,\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)}{\varrho^2-t^2}=(2m+3)\sum_{0}^{\left[\frac{m-i}{2}\right]}{}_{k}\,(2m+1-4k)\times\\
&\qquad\qquad\times\frac{(m-i-2k)!}{(m-i+2)!}\,\frac{(m+i)!}{(m+i-2k)!}\,\mathrm{P}_{m-2k,i}(\varrho)\,\mathrm{P}_{m-2k,i}(t)
\end{aligned}
\right.
$$

dove $\left[\frac{m-i}{2}\right]$ indica il massimo intero contenuto in $\frac{m-i}{2}$.

Con l'aiuto di queste formole possiamo intanto calcolare le derivate parziali della funzione $\Phi$ rispetto ad $x, y, z$. Abbiamo infatti:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{h(\varrho^2 - t^2)} \left[ (\varrho^2 - 1)\, t \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + (1 - t^2)\, \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = \\
&= \frac{1}{h(\varrho^2 - t^2)} \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{i+1}^{\infty}{}_{m} \frac{(m+i)(m-i+1)}{(2m+1)\, \mathrm{P}_{m,i}(r)} (\mathrm{A}_{m,i} \cos i\psi + \mathrm{B}_{m,i} \operatorname{sen} i\psi) \times \\
&\qquad \times [\mathrm{P}_{m+1,i}(\varrho)\, \mathrm{P}_{m-1,i}(t) - \mathrm{P}_{m+1,i}(t)\, \mathrm{P}_{m-1,i}(\varrho)], \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}}{h(\varrho^2 - t^2)} \cos\psi \left( \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\operatorname{sen}\psi}{h\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \\
&= -\frac{1}{2h(\varrho^2 - t^2)} \sum_{0}^{\infty}{}'_{i} \sum_{i+2}^{\infty}{}_{m} \frac{\mathrm{A}_{m,i} \cos(i+1)\psi + \mathrm{B}_{m,i} \operatorname{sen}(i+1)\psi}{(2m+1)\, \mathrm{P}_{m,i}(r) \sqrt{-1}} \times \\
&\qquad \times [\mathrm{P}_{m+1,i+1}(\varrho)\, \mathrm{P}_{m-1,i+1}(t) - \mathrm{P}_{m+1,i+1}(t)\, \mathrm{P}_{m-1,i+1}(\varrho)] - \\
&- \frac{1}{2h(\varrho^2 - t^2)} \sum_{1}^{\infty}{}_{i} \sum_{i}^{\infty}{}_{m} \frac{(m+i)(m+i-1)(m-i+1)(m-i+2)[\mathrm{A}_{m,i} \cos(i-1)\psi + \mathrm{B}_{m,i} \operatorname{sen}(i-1)\psi]}{(2m+1)\, \mathrm{P}_{m,i}(r) \sqrt{-1}} \times \\
&\qquad \times [\mathrm{P}_{m+1,i-1}(\varrho)\, \mathrm{P}_{m-1,i-1}(t) - \mathrm{P}_{m+1,i-1}(t)\, \mathrm{P}_{m-1,i-1}(\varrho)], \\
\frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}}{h(\varrho^2 - t^2)} \operatorname{sen}\psi \left( \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} - t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\cos\psi}{h\sqrt{(\varrho^2 - 1)(1 - t^2)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = \\
&= -\frac{1}{2h(\varrho^2 - t^2)} \sum_{0}^{\infty}{}'_{i} \sum_{i+2}^{\infty}{}_{m} \frac{\mathrm{A}_{m,i} \operatorname{sen}(i+1)\psi - \mathrm{B}_{m,i} \cos(i+1)\psi}{(2m+1)\, \mathrm{P}_{m,i}(r) \sqrt{-1}} \times \\
&\qquad \times [\mathrm{P}_{m+1,i+1}(\varrho)\, \mathrm{P}_{m-1,i+1}(t) - \mathrm{P}_{m+1,i+1}(t)\, \mathrm{P}_{m-1,i+1}(\varrho)] + \\
&+ \frac{1}{2h(\varrho^2 - t^2)} \sum_{1}^{\infty}{}_{i} \sum_{i}^{\infty}{}_{m} \frac{(m+i)(m+i-1)(m-i+1)(m-i+2)[\mathrm{A}_{m,i} \operatorname{sen}(i-1)\psi - \mathrm{B}_{m,i} \cos(i-1)\psi]}{(2m+1)\, \mathrm{P}_{m,i}(r) \sqrt{-1}} \times \\
&\qquad \times [\mathrm{P}_{m+1,i-1}(\varrho)\, \mathrm{P}_{m-1,i-1}(t) - \mathrm{P}_{m+1,i-1}(t)\, \mathrm{P}_{m-1,i-1}(\varrho)],
\end{aligned}
\right. \tag{9}
$$

dove l'accento, sulle sommatorie rispetto ad $i$, indica che per $i = 0$ manca il fattore $\frac{1}{2}$. E con l'aiuto dell' ultima delle (8′), queste espressioni delle derivate possono ridursi alla forma (7) stessa di $\Phi$.

2. *Soluzione del problema.* — Per quello che è stato detto possiamo porre:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} u \frac{d\mathrm{G}}{dn}\, d\sigma &= \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{i}^{\infty}{}_{m} (a_{m,i} \cos i\psi + b_{m,i} \operatorname{sen} i\psi) \frac{\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)}{\mathrm{P}_{m,i}(r)} \mathrm{P}_{m,i}(t), \\
\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} v \frac{d\mathrm{G}}{dn}\, d\sigma &= \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{i}^{\infty}{}_{m} (a'_{m,i} \cos i\psi + b'_{m,i} \operatorname{sen} i\psi) \frac{\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)}{\mathrm{P}_{m,i}(r)} \mathrm{P}_{m,i}(t), \\
\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} w \frac{d\mathrm{G}}{dn}\, d\sigma &= \sum_{0}^{\infty}{}_{i} \sum_{i}^{\infty}{}_{m} (a''_{m,i} \cos i\psi + b''_{m,i} \operatorname{sen} i\psi) \frac{\mathrm{P}_{m,i}(\varrho)}{\mathrm{P}_{m,i}(r)} \mathrm{P}_{m,i}(t),
\end{aligned}
\right. \tag{10}
$$

dove le $a$, $b$; $a'$, $b'$; $a''$, $b''$ sono da ritenersi costanti note. Supponiamo anche che la funzione armonica $\theta$ sia data dalla stessa espressione (7) di $\Phi$ in modo che i presunti valori che $\theta$ assume su $\sigma$ sieno dati dalla (5), e cerchiamo di calcolare gli altri termini che compaiono nelle (1). Per mezzo delle (6) e delle formole (8) e (8′), è facile porre i valori che:

$$
\xi\theta = hrt\theta \;, \quad \eta\theta = h\sqrt{r^2 - 1}\,\sqrt{1 - t^2}\,\theta \;, \quad \zeta\theta = h\sqrt{r^2 - 1}\,\sqrt{1 - t^2}\,\theta
$$

assumono su $\sigma$ sotto la forma (5) e si trova così:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = hr\sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg[\left(\frac{m+i+1}{2m+3}\,A_{m+1,i}+\frac{m-i}{2m-1}\,A_{m-1,i}\right)\cos i\psi\,+\\
&\qquad+\left(\frac{m+i+1}{2m+3}\,B_{m+1,i}+\frac{m-i}{2m-1}\,B_{m-1,i}\right)\operatorname{sen} i\psi\Bigg]\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{m,i}(t)\,,\\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg\{\Bigg[\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,A_{m+1,i+1}\,-\\
&\qquad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,A_{m-1,i+1}-\frac{A_{m+1,i-1}}{2m+3}+\frac{A_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg]\cos i\psi\,+\\
&\qquad+\Bigg[\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,B_{m+1,i+1}-\frac{(m-i-1)\,(m-1)}{2m-1}\,B_{m-1,i+1}\,-\\
&\qquad-\frac{B_{m+1,i-1}}{2m+3}+\frac{B_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg]\operatorname{sen} i\psi\Bigg\}\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{n,i}(t)\,,\\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg\{\Bigg[\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,B_{m+1,i+1}\,-\\
&\qquad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,B_{m-1,i+1}+\frac{B_{m+1,i-1}}{2m+3}-\frac{B_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg]\cos i\psi\,-\\
&\qquad-\Bigg[\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,A_{m+1,i+1}-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,A_{m-1,i+1}\,+\\
&\qquad+\frac{A_{m+1,i-1}}{2m+3}-\frac{A_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg]\operatorname{sen} i\psi\Bigg\}\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{m,i}(t)\,,
\end{aligned}\right.
$$

dimodochè si può scrivere:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg\{\Bigg[a_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(xA_{m,i}-hr\left(\frac{m+i+1}{2m+3}\,A_{m+1,i}+\frac{m-i}{2m-1}\,A_{m-1,i}\right)\right)\Bigg]\cos i\psi\,+\\
&\quad+\Bigg[b_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(xB_{m,i}-hr\left(\frac{m+i+1}{2m+3}\,B_{m+1,i}+\frac{m-i}{2m-1}\,B_{m-1,i}\right)\right)\Bigg]\operatorname{sen} i\psi\Bigg\}\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{m,i}(t),\\
v &= \sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg\{\Bigg[a'_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Bigg(yA_{m,i}-\frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\Bigg(\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,A_{m+1,i+1}\,-\\
&\quad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,A_{m-1,i+1}-\frac{A_{m+1,i-1}}{2m+3}+\frac{A_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg)\Bigg)\Bigg]\cos i\psi\,+\\
&\quad+\Bigg[b'_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Bigg(yB_{m,i}-\frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\Bigg(\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,B_{m+1,i+1}\,-\\
&\quad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,B_{m-1,i+1}-\frac{B_{m+1,i-1}}{2m+3}+\frac{B_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg)\Bigg)\Bigg]\operatorname{sen} i\psi\Bigg\}\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{m,i}(t),\\
w &= \sum_0^\infty{}_i\sum_i^\infty{}_m\Bigg\{\Bigg[a''_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Bigg(zA_{m,i}-\frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\Bigg(\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,B_{m+1,i+1}\,-\\
&\quad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,B_{m-1,i+1}+\frac{B_{m+1,i-1}}{2m+3}-\frac{B_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg)\Bigg)\Bigg]\cos i\psi\,+\\
&\quad+\Bigg[b''_{m,i}-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\Bigg(zB_{m,i}+\frac{h}{2}\sqrt{r^2-1}\Bigg(\frac{(m+i+1)\,(m+i+2)}{2m+3}\,A_{m+1,i+1}\,-\\
&\quad-\frac{(m-i-1)\,(m-i)}{2m-1}\,A_{m-1,i+1}+\frac{A_{m+1,i-1}}{2m+3}-\frac{A_{m-1,i-1}}{2m-1}\Bigg)\Bigg)\Bigg]\operatorname{sen} i\psi\Bigg\}\frac{P_{m,i}(\varrho)}{P_{m,i}(r)}\,P_{m,i}(t).
\end{aligned}\right.
$$

Il problema è ora ridotto a determinare le costanti A, B per mezzo delle costanti note $a, b; a', b'; a'', b''$ in modo che sia identicamente soddisfatta l'equazione (2). Moltiplicando ora questa equazione per $\varrho^2 - t^2$ ed osservando che:

$$(\varrho^2 - t^2)\,\theta = \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \frac{(m-i+1)(m-i+2)}{(2m+1)(2m+3)\,P_{m,i}(r)}(A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\times$$
$$\times[P_{m+2,i}(\varrho)\,P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t)\,P_{m,i}(\varrho)]$$
$$-\sum_0^\infty{}_i \sum_{i+2}^\infty{}_m \frac{(m+i)(m+i-1)}{(2m-1)(2m+1)\,P_{m,i}(r)}(A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\times$$
$$\times[P_{m,i}(\varrho)\,P_{m-2,i}(t) - P_{m,i}(t)\,P_{m-2,i}(\varrho)],$$

$$(\varrho^2 - t^2)\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\frac{\partial\theta}{\partial y} + z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = (\varrho^2-1)\,\varrho\frac{\partial\theta}{\partial\varrho} + (1-t^2)\,t\frac{\partial\theta}{\partial t} =$$
$$= \sum_0^\infty{}_i \sum_i^\infty{}_m \frac{m(m-i+1)(m-i+2)}{(2m+1)(2m+3)\,P_{m,i}(r)}(A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\times$$
$$\times[P_{m+2,i}(\varrho)\,P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t)\,P_{m,i}(\varrho)] +$$
$$+\sum_0^\infty{}_i \sum_{i+2}{}_m \frac{(m+1)(m+i)(m+i-1)}{(2m-1)(2m+1)\,P_{m,i}(r)}(A_{m,i}\cos i\psi + B_{m,i}\,\mathrm{sen}\, i\psi)\times$$
$$\times[P_{m,i}(\varrho)\,P_{m-2,i}(t) - P_{m,i}(t)\,P_{m-2,i}(\varrho)],$$

si trova subito che, sempre questa equazione (2), si può scrivere:

$$\text{(13)}\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty{}'_i \sum_i^\infty{}_m \frac{1}{2m+3}\Big\{\Big[\frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1}R_{m,i}\,A_{m,i} + \\ &\quad + \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5}S_{m+2,i}\,A_{m+2,i} - T_{m,i}\Big]\cos i\psi + \\ &\quad + \Big[\frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1}R_{m,i}\,B_{m,i} + \\ &\quad + \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5}S_{m+2,i}\,B_{m+2,i} - T'_{m,i}\Big]\mathrm{sen}\, i\psi\Big\}\times \\ &\quad \times[P_{m+2,i}(\varrho)\,P_{m,i}(t) - P_{m+2,i}(t)\,P_{m,i}(\varrho)] = 0 \end{aligned}\right.$$

in cui:

$$\text{(14)}\quad \left\{\begin{aligned} R_{m,i} &= \frac{3\lambda+5\mu+m(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)\,P_{m,i}(r)} - r\frac{m+i+1}{P_{m+1,i}(r)} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\,P_{m+1,i-1}(r)} - \frac{(m+i+1)(m+i+2)\sqrt{1-r^2}}{2\,P_{m+1,i+1}(r)}, \\ S_{m+2,i} &= \frac{-3\lambda-5\mu+(m+3)(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)\,P_{m+2,i}(r)} - r\frac{m-i+2}{P_{m+1,i}(r)} \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\,P_{m+1,i-1}(r)} + \frac{(m-i+1)(m-i+2)\sqrt{1-r^2}}{2\,P_{m+1,i+1}(r)}, \\ T_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)}\Big[2(m+i+1)(m-i+2)\frac{a_{m+1,i}}{P_{m+1,i}(r)} - \frac{a'_{m+1,i-1} - b''_{m+1,i-1}}{\sqrt{-1}\,P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\quad - \frac{(m+i+1)(m+i+2)(m-i+1)(m-i+2)(a'_{m+1,i+1} + b''_{m+1,i+1})}{\sqrt{-1}\,P_{m+1,i+1}(r)}\Big], \\ T'_{m,i} &= \frac{\mu}{h(\lambda+\mu)}\Big[2(m+i+1)(m-i+2)\frac{b_{m+1,i}}{P_{m+1,i}(r)} - \frac{b'_{m+1,i-1} + a''_{m+1,i-1}}{\sqrt{-1}\,P_{m+1,i-1}(r)} \\ &\quad - \frac{(m+i+1)(m+i+2)(m-i+1)(m-i+2)(b'_{m+1,i+1} - a''_{m+1,i+1})}{\sqrt{-1}\,P_{m+1,i+1}(r)}\Big], \end{aligned}\right.$$

e l'accento, sulla sommatoria rispetto ad $i$, indica che per i primi due valori di $i$: $R_{m,0}$, $R_{m,1}$, $S_{m+2,0}$,... si allontanano alquanto dalla legge generale.

Se ora torniamo a dividere per $\varrho^2 - t^2$ e teniamo conto dell'ultima delle (8') la formola (13) si porrà, facilmente sotto la forma

$$
(13') \quad \left.\begin{aligned}
&\sum_0^{\infty}{}'_i \sum_i^{\infty}{}_m \Bigg\{ \Bigg[ R_{m,i} A_{m,i} + (2m+1)\frac{(m-i)!}{(m+i)!} \sum_1^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!} \times \\
&\qquad\qquad \times (S_{m+2k,i} + R_{m+2k,i}) \frac{A_{m+2k,i}}{2m+4k+1} - \\
&\qquad - (2m+1)\frac{(m-i)!}{(m+i)!} \sum_0^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!} T_{m+2k,i} \Bigg] \cos i\psi + \\
&\qquad + \Bigg[ R_{m,i} B_{m,i} + (2m+1)\frac{(m-i)!}{(m+i)!} \sum_1^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!} \times \\
&\qquad\qquad \times (S_{m+2k,i} + R_{m+2k,i}) \frac{B_{m+2k,i}}{2m+4k+1} - \\
&- (2m+1)\frac{(m-i)!}{(m+i)!} \sum_0^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!} T'_{m+2k,i} \Bigg] \operatorname{sen} i\psi \Bigg\} P_{m,i}(\varrho)\, P_{m,i}(t) = 0 .
\end{aligned}\right.
$$

Per determinare le A corrispondenti ad un dato valore dell'indice $i$ abbiamo quindi le equazioni:

$$
(15) \quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{(m+i)!}{(m-i)!} R_{m,i} \frac{A_{m,i}}{2m+1} + \sum_1^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!} \times \\
&\qquad\qquad \times (S_{m+2k,i} + R_{m+2k,i}) \frac{A_{m+2k,i}}{2m+4k+1} = \\
&= \sum_0^{\infty}{}_k \frac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!} T_{m+2k,i}, \quad m = i, i+1 \cdots \infty
\end{aligned}\right.
$$

ed equazioni analoghe abbiamo per determinare le B corrispondenti a quel valore dell'indice $i$. Cadiamo così nella teoria dei determinanti infiniti. Però possiamo evitare di far uso di questa teoria notando che, se i coefficienti di $\cos i\psi$ e $\operatorname{sen} i\psi$ nella (13) sono nulli, le (15) sono identicamente soddisfatte e poichè sappiamo che il problema comporta una sola soluzione, ne deduciamo che, fra le nostre incognite, sono soddisfatte le seguenti equazioni:

$$
(16) \quad \begin{aligned}
&\frac{(m-i+1)(m-i+2)}{2m+1} R_{m,i} A_{m,i} + \\
&\qquad + \frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2m+5} S_{m+2,i} A_{m+2,i} = T_{m,i}
\end{aligned}
$$

e le analoghe nelle B. Ora dalla (16) ricaviamo facilmente:

$$
(17)\quad \begin{cases}
\dfrac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k)!}\,\dfrac{\mathrm{A}_{m+2k,i}}{2m+4k+1} = \\[2ex]
\qquad = (-1)^k \dfrac{(m+i)!}{(m-i)!}\,\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k,i}}\cdot\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-4,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2,i}}\cdots\dfrac{\mathrm{R}_{m,i}}{\mathrm{S}_{m+2,i}}\,\dfrac{\mathrm{A}_{m,i}}{2m+1} + \\[2ex]
\qquad + \sum_1^k{}_h (-1)^{h+1}\,\dfrac{(m+2k-2h+i)!}{(m+2k-2h+2-i)!}\,\cdot \\[2ex]
\qquad \cdot\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k,i}}\cdot\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-4,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2,i}}\cdots\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2h+2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2h+4,i}}\cdot\dfrac{\mathrm{T}_{m+2k-2h,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2h+2,i}};
\end{cases}
$$

quindi, sostituendo nella (15), si ha subito:

$$
(18)\quad \begin{cases}
\Big[\mathrm{R}_{m,i} + \sum_1^\infty{}_k (-1)^k (\mathrm{S}_{m+2k,i}+\mathrm{R}_{m+2k,i})\,\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k,i}}\,\cdot \\[2ex]
\qquad \cdot\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-4,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2,i}}\cdots\dfrac{\mathrm{R}_{m,i}}{\mathrm{S}_{m+2,i}}\Big]\,\dfrac{(m+i)!}{(m-i)!}\,\dfrac{\mathrm{A}_{m,i}}{2m+1} = \\[2ex]
= \sum_0^\infty{}_k \dfrac{(m+i+2k)!}{(m-i+2k+2)!}\,\mathrm{T}_{m+2k,i} - \sum_1^\infty{}_k \sum_1^k{}_h (-1)^{h+1}\,\dfrac{(m+2k-2h+i)!}{(m+2k-2h+2-i)!}\,\times \\[2ex]
\qquad \times(\mathrm{S}_{m+2k,i}+\mathrm{R}_{m+2k,i})\,\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k,i}}\cdot\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-4,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2,i}}\cdots\dfrac{\mathrm{R}_{m+2k-2h+2,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2h+4,i}}\cdot\dfrac{\mathrm{T}_{m+2k-2h,i}}{\mathrm{S}_{m+2k-2h+2,i}}.
\end{cases}
$$

Da formole analoghe sono determinate le $\mathrm{B}_{m,i}$. In una prossima occasione ci proponiamo di esaminare più particolarmente la validità di questa soluzione.

3. *Accenno al caso in cui in superficie sono date le tensioni.* — Il nuovo problema, a volerlo trattare direttamente, con i principî da me sfruttati in altri casi, presenterebbe difficoltà di calcolo non lievi. Il procedimento più semplice per risolverlo, consiste, a mio avviso, nel costruire le espressioni:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\lambda\theta\,\dfrac{x}{r^2} + 2\mu\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\,\dfrac{x}{r^2} + \dfrac{1}{r^2-1}\left(y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\,\dfrac{\partial u}{\partial z} + y\varpi_3 - z\varpi_2\right)\right], \\[2ex]
\lambda\theta\,\dfrac{y}{r^2-1} + 2\mu\left[\dfrac{x}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \varpi_3\right) + \dfrac{1}{r^2-1}\left(y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\,\dfrac{\partial u}{\partial z} + z\varpi_1\right)\right], \\[2ex]
\lambda\theta\,\dfrac{z}{r^2-1} + 2\mu\left[\dfrac{x}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \varpi_2\right) + \dfrac{1}{r^2-1}\left(y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\,\dfrac{\partial u}{\partial z} - y\varpi_1\right)\right],
\end{cases}
$$

essendo le $u, v, w$ quelle determinate nel problema precedente, e nel trasformare queste espressioni, opportunamente, in modo che i loro valori in superficie risultino sviluppati in serie di funzioni sferiche, il che si può ottenere servendosi delle (8) e (8′). Osservando che i valori che così si ottengono sono anche i valori di

$$
(20)\quad \mathrm{L}\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}}\,,\quad \mathrm{M}\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}}\,,\quad \mathrm{N}\sqrt{\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2+z^2}{(r^2-1)^2}}
$$

dove L, M, N sono le date tensioni in superficie, resterà allora a sviluppare in serie di funzioni sferiche le espressioni (20) e a determinare le costanti $a, b; a', b'; a'', b''$ che compariscono nelle espressioni di $u, v, w$, in modo che sulla superficie dell'ellissoide le espressioni (19) diventino eguali alle corrispondenti espressioni (20).

4. *Osservazioni.* — Questi procedimenti che contengono come caso particolare un nuovo metodo per risolvere i problemi di equilibrio elastico per la sfera e le due sfere concentriche, possono essere evidentemente estesi a risolvere il problema dell'equilibrio elastico di un corpo limitato da due ellissoidi di rotazione confocali.

## Fisica. — *Spettri di incandescenza dell'Iodio e del Bromo.* [1] Nota del dott. L. Pucciant, presentata dal Socio A. Ròiti.

La lettura di una interessante Nota dei signori R. Nasini e F. Anderlini [2] intitolata: *Osservazioni spettroscopiche ad altissime temperature*, in cui sono descritte alcune belle esperienze ed è fatto cenno di un tentativo per ottenere lo spettro di emissione per temperatura dell'iodio, mi ha persuaso ad anticipare la comunicazione di alcuni avvertimenti circa il modo di osservare gli spettri di incandescenza, e di alcune esperienze da me eseguite un anno fa, e comunicate allora alla Commissione esaminatrice per la mia libera docenza. Esse erano destinate a un più ampio scritto di spettroscopia, che verrà pubblicato fra non molto.

Rimando il lettore al cenno storico che forma la prima parte della Nota di Anderlini e Nasini; solo voglio aggiungere quanto segue:

L'Evershed [3] nelle sue esperienze eseguite sui vapori di molti metalloidi tra cui iodio e bromo fortemente scaldati in tubi di vetro, osservò uno spettro di bande per assorbimento e uno spettro continuo per emissione, e ne concluse che si trattasse di una emissione di temperatura sì, ma per la quale non valesse esattamente la legge di Kirchhoff.

Ora ciò, come osserva giustamente il Pringsheim [4], è inammissibile, e se il risultato dell'Evershed fosse rispondente al vero, bisognerebbe ammettere trattarsi di luminescenza. Ma poichè almeno per il bromo e l'iodio non si può trovare una verosimile fonte di luminescenza [5], a me sembrava più logico

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî superiori in Firenze, dicembre 1904.

[2] Questo periodico. *13*, 59, 1904.

[3] Phil. Mag. (S. 5), *39*, 460, 1895.

[4] Rapports pres. au Congr. Int. de Physique. Paris, 1900, tome. II$^e$, 100.

[5] Se non è raggiunta la temperatura di completa dissociazione della molecola biatomica in atomi liberi si potrebbe pensare alla reazione

$$J_2 = 2\,J \text{ oppure } Br_2 = 2\,Br$$

come origine della luminescenza. Ma quando la temperatura rimane costante, essa non è che una reazione reversibile in equilibrio, e quindi la variazione dell'energia che potrebbe