ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1º SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

non può essere, dunque la formula (2) risolve il nostro problema, se noi possiamo determinare $N(x, y, z)$. Ma la formula del Betti

$$4\pi(\lambda+2\mu)\Theta = -\int\left[\mathrm{L}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\xi\right)+\mathrm{M}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\eta\right)\right]d\sigma\,,$$

dove r, ξ, η hanno significazioni ben note, fa conoscere Θ in un punto generico di S; e, dopo ciò il $\Delta_2 N$ dianzi calcolato in funzione di Θ, può ritenersi come noto, perciò troviamo subito, in un punto generico di S,

$$\mathrm{N} = -\frac{\lambda+\mu}{2\pi}\int\left(\frac{1}{r}-\mathrm{G}_1\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\,d\mathrm{S}\,,$$

dove G_1 denota la funzione di Green. Le grandezze ξ ed η sono le componenti, secondo x e y, dello spostamento nella *deformazione ausiliare*. Non è difficile dare le espressioni di ξ, η, in funzione dei dati: ciò si può fare con varî metodi, ormai noti.

Faremo ancora una breve osservazione. Noi abbiamo ammesso, senza dimostrazione, il cosiddetto *teorema d'esistenza*, relativo a un sistema di forze superficiali, vincolate dalla condizione che esse manterrebbero il corpo in equilibrio, se fosse rigido. Non è improbabile che alcune ricerche recentissime (e specialmente quelle sull'inversione degl'integrali definiti) possano avviare gli studiosi alla dimostrazione di questo teorema per forme di corpi molto meno semplici e molto più generiche di quella che ora consideriamo. Per ora possiamo dire che questa proposizione ha la stessa evidenza di tante altre che concordemente i fisici ritengono come *certe*; ma bisogna aggiungere che il rigore analitico richiede che i risultati, ottenuti col nostro presente metodo, debbano essere, volta per volta, soggetti a prova; e non è infondato il dubbio che le difficoltà d'integrazione possano, in alcuni casi, rendere queste prove impraticabili. Sebbene queste idee contrarie siano di natura ben grave, tuttavia credo che non siano poche le occasioni nelle quali il metodo sia abbastanza facilmente ed utilmente applicabile.

Fisica matematica. — *Sopra un' applicazione del metodo di Riemann alla integrazione delle equazioni differenziali della teoria degli elettroni.* Nota del dott. Max Abraham, presentata dal Socio V. Volterra.

Le equazioni indefinite della teoria degli elettroni si possono ricondurre, come è noto, a equazioni differenziali alle derivate parziali della forma

(1) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\Delta\Phi = 4\pi\varrho\,.$$

H. Poincaré, E. Beltrami, V. Volterra, H. A. Lorentz, T. Levi-Civita ed altri autori mostrarono che all' equazione (1) soddisfanno certi « potenziali ritardati ». Nelle loro ricerche essi presero le mosse dalle espressioni di questi potenziali e giunsero alle equazioni differenziali mediante differenziazioni, seguendo così una via che si adatta più alla rappresentazione delle azioni a distanza che non a quelle di contatto.

Per la rappresentazione di quest' ultime sarebbe più rispondente un metodo, con cui, partendo dalle equazioni differenziali, si giungesse agli integrali. È quello che noi faremo in seguito adoperando il metodo d' integrazione di Riemann. Il procedimento che seguiremo sarà più semplice di quello dato da O. Tedone [1] e nemmeno coinciderà in ogni sua parte coi metodi usati da V. Volterra [2] per il caso di due dimensioni.

Introdotta la nuova variabile $l = ct$, cioè lo spazio percorso dalla luce nel tempo t, avremo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} - \Delta \Phi = 4\pi\varrho . \tag{2}$$

Sieno ora dati i valori iniziali:

$$l = 0 \quad : \quad \Phi = f(x\,, y\,, z) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial l} = g(x\,, y\,, z)\,, \tag{3}$$

e si supponga che per $l > 0$, ϱ sia funzione delle coordinate e di l.

Poniamo:

$$\frac{\Omega(r\,, l)}{r} = \frac{1}{4\pi}\int \Phi\, d\omega\,, \tag{4}$$

con che il secondo membro risulterà il valore medio di Φ sulla sfera di raggio r avente per centro un punto determinato.

Determinata Ω, il valore della funzione Φ nel centro della sfera risulterà dalla relazione:

$$\Phi(0\,, l) = \lim_{r=0} \left\{ \frac{\Omega(r\,, l)}{r} \right\}. \tag{5}$$

Ora per Ω vale l' equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \chi\,, \tag{6}$$

χ essendo una funzione nota per $r \geqq 0$, $l \geqq 0$, in quanto essa è data da

$$\chi(r\,, l) = r \int \varrho\, d\omega\,, \tag{7}$$

in cui ϱ è determinata sulla sfera di raggio r.

[1] O. Tedone, R. Acc. dei Lincei, (5), vol. V, 1° sem. 1896, pag. 357.
[2] V. Volterra, R. Acc. dei Lincei, (5), vol. I, 2° sem. 1892, pag. 265.

In virtù delle (3), (4) i valori iniziali di Ω sono:

$$(8)\qquad l=0 \quad : \quad \Omega = \mathrm{F}(r) \quad , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \mathrm{G}(r)\,,$$

ove le funzioni:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(r) = \dfrac{r}{4\pi}\displaystyle\int f\, d\omega\,, \\[2ex] \mathrm{G}(r) = \dfrac{r}{4\pi}\displaystyle\int g\, d\omega\,, \end{cases}$$

sono, a priori, definite pei soli valori positivi di r. Noi ne estenderemo la definizione a tutti i valori reali dell' argomento r ponendo:

$$(10)\qquad \mathrm{F}(-r) = -\mathrm{F}(r) \quad , \quad \mathrm{G}(-r) = -\mathrm{G}(r)\,,$$

ed analoga estensione sarà fatta per la funzione χ, quando si ponga, per $l \gtreqless 0$:

$$(11)\qquad \chi(-r\,,l) = -\chi(r\,,l)\,.$$

Nelle *Lezioni* di Riemann pubblicate da H. Weber, l' equazione (6) è integrata, per $\chi = 0$, col metodo di Riemann [1]. Anche l' equazione (1) è ivi [2] ricondotta, nel caso dell' omogeneità, all' equazione omogenea delle corde vibranti; si tratta qui di applicare quei metodi al caso della non omogeneità.

Usando del metodo di Riemann, l' integrazione dell' equazione (6) porge [3]:

$$(12)\qquad 2\,\Omega(r\,,l) = \mathrm{F}(r+l) + \mathrm{F}(r-l) + \int_{r-l}^{r+l} d\alpha\, \mathrm{G}(\alpha) + \iint_{\mathrm{S}} \chi(r\,,l)\, dr\, dl\,.$$

La superficie, cui è esteso il secondo integrale, è il triangolo isoscele ABC rettangolo in C avente questo vertice nel punto del piano $(r\,,l)$ in cui è calcolata la funzione Ω, e la base AB sull' asse delle ascisse $l=0$.

Nel passaggio al limite stabilito dalla formula (5) il punto C si porta sull' asse l. In tal caso l' integrale doppio della formula (12) s'annulla, perchè il contributo portato all'integrale da due elementi simmetrici rispetto all' asse l è nullo in virtù della (11). Non è nullo invece il limite del rapporto fra quell' integrale e $2r$ per r convergente a zero, ma riducesi bensì a un integrale semplice esteso al segmento CB, e precisamente

$$\lim_{r=0} \frac{1}{2r} \iint_{\mathrm{S}} \chi(r\,,l)\, dr\, dl = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}} ds\, \chi\,.$$

(1) Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Pyhsik*. 4te Auflage. Braunschweig 1901, vol. II, § 90, pag. 224.

(2) Riemann-Weber, vol. II, § 120, pag. 302.

(3) Il sig. prof. Volterra mi ha comunicato di aver usato la formula (12) nelle sue lezioni.

Se λ è l'ascissa di un punto della retta CB nella sua posizione limite, $l-\lambda$ è la sua ordinata. In virtù delle (12) e (10) si ha dunque:

$$\lim_{r=0} \frac{\Omega(r\,,l)}{r} = \mathrm{F}'(l) + \mathrm{G}(l) + \int_0^l d\lambda\, \chi(\lambda\,, l-\lambda) \tag{13}$$

e infine dalle (5) e (7) segue:

$$\Phi(0\,, l) = \mathrm{F}'(l) + \mathrm{G}(l) + \int_0^l \lambda\, d\lambda \int d\omega\, \varrho(\lambda\,, l-\lambda)\,. \tag{14}$$

Questa formula risolve la questione propostaci. Il valore, che la funzione Φ ha in un punto generico dello spazio nel tempo $t=\frac{l}{c}$, dipende, come risulta esplicitamente dai due primi termini, dallo stato iniziale della superficie della sfera, che ha per centro quel punto e per raggio l, e inoltre, come apparisce dal terzo termine, dai valori che ϱ assume sulle sfere di raggio λ al tempo $t-\frac{\lambda}{c}$, λ dovendo assumere tutti i valori fra 0 ed l.

La soluzione data dell'equazione differenziale (1) si presenta nella forma più opportuna per le applicazioni nella teoria degli elettroni.

Fisica. — *Intorno ad alcuni semplici strumenti per l'esatta verificazione dell'ora.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Per regolare l'orologio di precisione di Strasser e Rhode cui accennai in una Nota precedente [1], mi sono servito d'un cannocchiale orizzontale, fissato sopra un sostegno con tre viti di livello, e con un prisma fissato dinanzi all'obbiettivo in modo che uno spigolo fosse orizzontale e perpendicolare all'asse ottico e che le due faccie adiacenti fossero rivolte verso l'obbiettivo ed ugualmente inclinate l'una sopra l'altra sotto il piano orizzontale, mentre la terza faccia che era verticale era coperta da una lamina opaca ed essendo inutile poteva anche essere scabrosa.

Come indicai nella prima Nota, i raggi provenienti da una stella direttamente o dopo riflessi da un orizzonte artificiale, riflettendosi su l'una o l'altra delle faccie del prisma, formano nel piano focale dell'obbiettivo due immagini che coincidono quando l'altezza della stella è uguale all'angolo delle faccie, se il cannocchiale è convenientemente orientato. Osservando con un orologio gl'istanti del contatto delle due immagini prima ad un lato e poi all'altro del meridiano e prendendo la media, si ha l'istante del passaggio della stella al meridiano.

L'uso d'un prisma riflettente dinanzi all'obbiettivo d'un cannocchiale, per misura d'angoli, non è nuovo. Sebbene non abbia potuto consultare nè gior-

[1] V. questi Rendiconti, vol. XIII, fasc. 12°, 2° sem. 1904.