ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Matematica. — *Sui gruppi transitivi dello spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

In questa Nota do un teorema generale riguardante la forma delle operazioni dell'ordine massimo (>4) di un gruppo finito continuo transitivo; in una Nota successiva ne mostrerò due applicazioni coll'assegnare un limite assai più stretto di quello del Lie all'ordine delle operazioni di un gruppo primitivo e coll'approfondire lo studio delle sottoclassi di una classe di gruppi.

I.

1. Sia G un gruppo transitivo dello spazio ad n dimensioni le cui variabili indicheremo con $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supponiamo che l'origine sia un punto generico del gruppo; si operi in esso la distribuzione canonica delle operazioni secondo l'ordine e sia $s>2$ l'ordine massimo delle operazioni del gruppo. Siccome il gruppo è transitivo, posto $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ in esso esisteranno le n operazioni di ordine 0:

$$(1) \qquad X_1 f = p_1 + \ldots, \; X_2 f = p_2 + \ldots, \ldots, X_n f = p_n + \ldots$$

dove i termini tralasciati sono di ordine >0. Sia Yf un'operazione di ordine massimo s:

$$(2) \qquad Yf = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n + \ldots$$

dove le ξ sono forme di grado s ed i termini tralasciati sono di ordine $>s$. Insieme colle (1) e colla Yf esisteranno in G le operazioni

$$(3) \qquad Y_i f = (YX_i) = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} p_i - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} p_2 - \cdots - \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} p_n + \ldots$$

dove i termini tralasciati sono di ordine $>s-1$. L'operazione (YY_i) sarà di ordine $2s-2$ almeno; ma poichè $s>2$, sarà $2s-2>s$, e quindi l'operazione (YY_i), di G e di ordine $>s$ sarà identicamente nulla:

$$0 = (YY_i) = \sum_1^n{}_j \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} - \sum_1^n{}_k \xi_k \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) p_j + \ldots$$

sempre trascurando i termini di ordine $>2s-2$. Quindi si avranno le n^2 equazioni

$$(4) \qquad \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) = 0 \qquad (i, j = 1 \ldots n)$$

Ricordiamo che le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sono forme di grado s in $x_1, x_2, \ldots, x_n$: pel teorema di Eulero sulle funzioni omogenee sarà quindi

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} x_i = s\xi_k \,, \sum \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} x_i = (s-1) \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \,.$$

Quindi moltiplicando per x_i le (4) e sommando rapporto ad i, si otterrà

$$(5) \qquad 0 = \sum_1^n {}_k \, \xi_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \qquad (j = 1, \ldots n)$$

Deriviamo rapporto ad x_i queste equazioni (5); si ottiene:

$$0 = \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} + \xi_k \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} \right) \qquad (j, i = 1, \ldots n)$$

Confrontando queste equazioni con le (4), avremo quindi

$$(6) \qquad \sum_1^n {}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (j, i = 1, \ldots n)\ [1]$$

Le ξ_k e le $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ soddisfanno quindi per (5) e per (6) ad uno stesso sistema di equazioni lineari omogenee: affinchè le ξ non siano tutte nulle dovrà essere nullo il determinante dei coefficienti. Ma questo è il determinante funzionale delle ξ rapporto alle x; dovrà quindi essere $\frac{\partial(\xi_1 \, \xi_2 \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \, x_2 \ldots x_n)} = 0$. Le ξ non sono quindi funzioni indipendenti delle x; noi potremo supporre che fra esse ve ne siano r sole indipendenti e che queste siano precisamente $\xi_1 \, \xi_2 \ldots \xi_r$. Sarà quindi

$$(7) \qquad \frac{\partial \xi_{r+h}}{\partial x_i} = \sum_1^r {}_k \, A_{r+h\,k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \quad (h = 1 \ldots n-r \,, i = 1 \ldots n)$$

Donde pel teorema di Eulero sarà pure

$$(8) \qquad \xi_{r+h} = \sum_1^r {}_k \, A_{r+h\,k} \, \xi_k \,.$$

Sostituendo nelle (6) a $\frac{\partial \xi_{r+h}}{\partial x_i}$ i loro valori dati dalle (7), si otterrà

$$\sum_1^r {}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} + A_{r+1\,k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{r+1}} + A_{r+2\,k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{r+2}} + \ldots A_{hk} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_n} \right) = 0$$

[1] Si noti che le (6) per il teorema di Eulero hanno per conseguenza le (5); e che quindi le (6) sono equivalenti alle (4) perchè quelle si deducono da queste e viceversa queste dalle (6) e dalle (5). Esse esprimono quindi completamente la condizione che (YY_i) abbia nulli i suoi termini di ordine minimo.

Ma per ipotesi in $\dfrac{\partial(\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_r)}{\partial(x_1\,x_3\ldots x_n)}$ esiste un minore $\neq 0$ d'ordine r, quindi si avrà identicamente

$$\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k} = -\sum_1^{n-r}{}_h\, \mathrm{A}_{r+hk}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_{r+h}} \qquad (j=1\ldots n\,;\,k=1\ldots r) \tag{9}$$

Segue di qui che la caratteristica di $\dfrac{\partial(\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_r)}{\partial(x_1\,x_2\ldots x_n)}$ è $\leq n-r$, ma essa è $=r$, quindi dev'essere $r\leq n-r$ ossia $r\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$, dove $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ indica il massimo intero contenuto in $\dfrac{n}{2}$.

Osservazione. — Le A_{r+hk} sono funzioni omogenee di grado 0 nelle $x_1\,x_2\ldots x_n$; non però qualunque, poichè esse debbono soddisfare alle condizioni di integrabilità delle (7) e (9). Se noi supponiamo $n=2\,,3$ si deduce di qui facilmente che le A_{r+hk} sono costanti. Infatti per l'ultima osservazione dovendo essere $r\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$, sarà in questi casi $r=1$. Quindi le (7) diverranno $\dfrac{\partial\xi_h}{\partial x_i}=\mathrm{A}_h\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_i}$ $(h=2\,,3\;;\;i=1\,,2\,,3)$ e le (8) $\xi_h=\mathrm{A}_h\xi_1$. Da queste ultime derivando e confrontando colle precedenti si deduce $\dfrac{\partial \mathrm{A}_h}{\partial x}=0$ e quindi $\mathrm{A}_h=\text{cost.}$

2. Supponiamo ora $s>4$. Allora l'operazione $Y_{il}=(Y_i\,X_l)$ sarà una operazione di G di ordine $s-2$ almeno:

$$Y_{il}=\sum_1^n{}_i\,\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_i\,\partial x_l}\,p_j+\ldots \tag{10}$$

Ed essendo $s>4$ sarà $2s-4>s$ e quindi l'operazione $(Y_{il}\,Y_m)$ di ordine $2s-4$ almeno sarà identicamente nulla. Ma si ha

$$(Y_{il}\,Y_m)=\sum{}_j\left(\sum_1^n{}_k\,\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\,\partial x_l}\,\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_m\,\partial x_k}-\sum_1^n{}_k\,\frac{\partial\xi_k}{\partial x_m}\,\frac{\partial^3\xi_j}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_k}\right)p_j+\cdots$$

Quindi dovrà essere

$$\sum_1^n{}_k\left(\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\,\partial x_l}\,\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_m\,\partial x_k}-\frac{\partial\xi_k}{\partial x_m}\,\frac{\partial^3\xi_j}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_k}\right)=0 \qquad (i,l,m,j=1\ldots n)$$

Moltiplicando per x_m e sommando, si otterrà dal teorema di Eulero

$$(s-1)\sum_1^n{}_k\,\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\,\partial x_l}\,\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}-s\sum_1^n\xi_k\,\frac{\partial^3\xi_j}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_k}=0 \tag{11}$$

Ma derivando (6) rapporto ad x_l si ottiene

$$(12) \qquad \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_k \partial x_l} = 0$$

E similmente, osservando che per (6) e (4) si ha $\sum \xi_k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_l \partial x_k} = 0$, e derivando rapporto ad x_i quest' ultima equazione si ha

$$(13) \qquad \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_k \xi_k \frac{\partial^3 \xi_j}{\partial x_i \partial x_l \partial x_k} = 0$$

Sottraendo dalla (12) la (13) e confrontando con (11) si ha

$$(14) \qquad \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, l, j = 1 \ldots n)$$

Le (14) non sono altro che le (6) in cui a $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ si è sostituito $\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_l}$: quindi le derivate seconde debbono soddisfare all' equazioni stesse che le derivate prime, e cioè dovrà essere

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 \xi_{r+h}}{\partial x_i \partial x_l} = \sum_1^r {}_k A_{r+hk} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_l} \qquad (h = 1 \ldots n - r\,,\, i, l = 1 \ldots n)$$

D'altra parte, derivando (7) si ha

$$\frac{\partial^2 \xi_{r+h}}{\partial x_i \partial x_l} = \sum_1^r {}_k A_{r+hk} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_l} + \sum_1^r {}_k \frac{\partial A_{r+hk}}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

e confrontando con (15) si deduce

$$\sum_1^r {}_k \frac{\partial A_{r+hk}}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (h = 1 \ldots n - r\,,\, i, l = 1 \ldots n)$$

donde, per essere $\frac{\partial(\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_r)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)} \neq 0$, si ottiene $\frac{\partial A_{r+hk}}{\partial x_l} = 0$ ossia $A_{r+hk} = $ $=$ cost.

L'operazione Yf si potrà, per le (8), scrivere nella forma

$$Yf = \xi_1(p_1 + A_{r+11}\, p_{r+1} + \ldots A_{n1}\, p_n) + \xi_3(p_2 + A_{r+12}\, p_{r+1} + \ldots A_{n2}\, p_n) + \\ \ldots + \xi_r(p_r + A_{r+1r}\, p_{r+1} + \cdots + A_{nr}\, p_n)$$

Facciamo la trasformazione di coordinate

$$(16) \qquad \begin{gathered} x'_1 = x_1\,,\; x'_2 = x_2\,, \ldots, x'_r = x_r \\ x'_{r+h} = x_{r+h} - A_{r+h1}\, x_1 - A_{r+h2}\, x_2 - \cdots - A_{r+hr}\, x_r \end{gathered}$$

che, poichè le A sono costanti, è regolare nell'origine, e non muta quindi la distribuzione canonica delle operazioni secondo l'ordine; sarà $p'_k = p_k + A_{r+1k}\, p_{r+1} + \dots + A_{nk}\, p_n$ $(k \leq r)$, quindi la Yf si muterà nell'altra

$$Yf = \xi_1 p'_1 + \xi_2 p'_2 + \dots \xi_r p'_r + \dots$$

Le ξ saranno forme nelle nuove variabili x'; le (9) ci dicono però che esse non dipendono da $x'_1\, x'_2 \dots x'_r$. Si può quindi conchiudere intanto che:

Se in un gruppo G *transitivo esiste una operazione Yf di ordine massimo $s > 4$, si può con un cambiamento di variabili portarla nella forma $Yf = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots \xi_r p_r + \dots$* (tralasciando i termini di ordine $> s$) *dove è $r \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ e le ξ sono funzioni di $x_{r+1}\, x_{r+2} \dots x_n$ soltanto*. Si noti che le stesse conclusioni valgono non solo se l'ordine di Yf è l'ordine massimo s, ma anche se è un ordine s' tale che $2s' - 4 > s$.

Osservazione. — Per $n = 2, 3$ la osservazione in fine al n. 1 ci dice che le stesse conclusioni valgono per $s > 2$.

3. Si supponga ora che il gruppo G contenga oltre ad Yf un'altra operazione di ordine s: $\overline{Y}f = \sum_1^n{}_j\, \eta_j p_j + \dots$; esso conterrà allora tutte le operazioni $Y^{(t)}f = \overline{Y}f + t\, Yf$ dove t è un parametro arbitrario:

$$(17)\quad Y^{(t)}f = H_1^{(t)}\, p_1 + H_2^{(t)} p_2 + \dots + H_r^{(t)}\, p_r + \eta_{r+1}\, p_{r+1} + \dots + \eta_n\, p_n + \dots$$

$$(H_i^{(t)} = \eta_i + t\xi_i)$$

Operando sopra $Y^{(t)}f$ come su Yf si otterrebbe che, con un conveniente mutamento di variabili, si può portare $Y^{(t)}f$ nella forma del n. 2; ma non si potrebbe affermare che le operazioni $Y^{(t)}f$, Yf si possono *contemporaneamente* portare nella forma predetta, perchè il cambiamento di variabili potrebbe dipendere da t. Il seguente ragionamento varrà ad escludere questo dubbio. Osserviamo perciò che le funzioni $H_1^{(t)}\, H_2^{(t)} \dots H_r^{(t)}\, \eta_{r+1} \dots \eta_n$ non sono indipendenti non solo quando si riguardino quali funzioni di $x_1\, x_2 \dots x_n$, ma anche di $x_1\, x_2 \dots x_n\, t$. Infatti, posto, in modo analogo al n. 1, $Y_i^{(t)} = (Y^{(t)} X_i)$, si hanno le identità $(Y^{(t)}\, Y) = 0$ $(Y_i^{(t)}\, Y) = 0$. Le quali si tradurranno nelle equazioni

$$(18)\quad \sum_1^{n-r}{}_k\, \eta_{r+k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{r+k}} - \sum_1^r{}_k\, \xi_k \frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_k} = 0 \quad (j = 1 \dots r)$$

$$\sum_1^r{}_k\, \xi_k \frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_k} = 0 \quad (j = 1 \dots n - r)$$

$$(19)\quad \sum_1^{n-r}{}_k \frac{\partial \eta_{r+k}}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{r+k}} - \sum_1^r \xi_k \frac{\partial^2 H_j^{(t)}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \quad (i = 1 \dots n, j = 1 \dots r)$$

$$\sum_1^r \xi_k \frac{\partial^2 \eta_{r+j}}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \quad (j = 1 \dots n - r, i = 1 \dots n)$$

Moltiplicando le (19) per x_i e sommando rispetto ad i per ogni valore fisso di j, sempre pel teorema di Eulero sarà

$$s \sum_1^{n-r} {}_k\, \eta_{r+k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{r+k}} - (s-1) \sum_1^r {}_k\, \xi_k \frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_k} = 0 \qquad (j = 1 \dots r)$$

$$\sum \xi_k \frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_k} = 0 \qquad (j = 1 \dots n-r)$$

Confrontando con le (18) si avrà quindi

$$\sum \xi_k \frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_k} = 0 \qquad \sum \xi_k \frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_k} = 0$$

Ma possiamo scrivere $\xi_k = \dfrac{\partial H_k^{(t)}}{\partial t}$, quindi infine si avrà

$$(20) \quad \frac{\partial H_1^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial H_r^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_r} = 0 \qquad (j = 1 \dots r)$$

$$(21) \quad \frac{\partial H_1^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial H_r^{(t)}}{\partial t}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_r} = 0 \qquad (j = 1 \dots n-r)$$

D'altra parte varranno per le $H^{(t)}, \eta$ le equazioni analoghe alle (6):

$$(22) \quad \frac{\partial H_1^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial H_r^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_r} + \frac{\partial \eta_{r+1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_{r+1}} + \dots +$$
$$+ \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i}\frac{\partial H_j^{(t)}}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots r)$$

$$(23) \quad \frac{\partial H_1^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial H_r^{(t)}}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_r} + \frac{\partial \eta_{r+1}}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_{r+1}} + \dots +$$
$$+ \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n-r)$$

Dai sistemi (20), (22) e (21), (23) si deduce che la matrice funzionale $\dfrac{\partial (H_1^{(t)} H_2^{(t)} \dots H_r^{(t)}\, \eta_{r+1}\, \eta_{r+2} \dots \eta_n)}{\partial (x_1\, x_2 \dots x_n\, t)}$ è nulla: fra le funzioni indipendenti potremo scegliere le $H_1^{(t)} \dots H_r^{(t)}$, poichè già sono indipendenti le $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r$; siano $H_1^{(t)} H_2^{(t)} \dots H_r^{(t)}\, \eta_{r+1} \dots \eta_{r_1}$ le funzioni indipendenti, sarà

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \eta_{r_1+h}}{\partial x_i} &= \sum_1^r {}_k\, B_{r_1+h\,k} \frac{\partial H_k^{(t)}}{\partial x_i} + \sum_1^{r-r_1} {}_k\, B_{r_1+h\,r+k} \frac{\partial \eta_{r+k}}{\partial x_i} \\ 0 &= \sum_1^r {}_k\, B_{r_1+h\,k} \frac{\partial H_k^{(t)}}{\partial t} \end{aligned}$$

Si proceda come al n. 1: si otterranno per le (24) dalle (20)-(23) le equazioni

$$
\begin{aligned}
&\sum_1^r {}_k \frac{\partial \boldsymbol{H}_k^{(t)}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_k}+\mathrm{B}_{r_1+1k}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r_1+1}}+\cdots+\mathrm{B}_{nk}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_n}\right)+\\
(25)\qquad &+\sum_1^{r-r_1}{}_k \frac{\partial \eta_{r+k}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r+k}}+\mathrm{B}_{r_1+1\,r+k}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r_1+1}}+\cdots+\mathrm{B}_{nr+k}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_n}\right)=0\\
&\sum_1^r {}_k \frac{\partial \boldsymbol{H}_k^{(t)}}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_k}+\mathrm{B}_{r_1+1\,k}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r_1+1}}+\cdots+\mathrm{B}_{nk}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_n}\right)=0 \text{ (1)}
\end{aligned}
$$

e le analoghe in cui nelle parentesi ad $\boldsymbol{H}_j^{(t)}\,(j=1\ldots r)$ è sostituito $\eta_{r+j}(j=1\ldots n-r)$. Quindi considerando che $\dfrac{\partial(\boldsymbol{H}_1^{(t)}\,\boldsymbol{H}_2^{(t)}\ldots\boldsymbol{H}_r^{(t)}\,\eta_{r+1}\ldots\eta_{r_1})}{\partial(x_1\,x_2\ldots x_n\,t)}\neq 0$, si dedurranno le analoghe delle (9)

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_k}=-\sum_1^{n-r_1}{}_h \mathrm{B}_{r_1+hk}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r_1+h}}\qquad (j=1\ldots r\,,\ k=1\ldots r_1)\\
&\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_k}=-\sum_1^{n-r_1}{}_h \mathrm{B}_{r_1+hk}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_{r_1+h}}\qquad (j=1\ldots n-r\,,\ k=1\ldots r_1)
\end{aligned}
$$

Procedendo ora come al n. 2 col considerare che si ha $(Y_{il}^{(t)}\,Y_m^{(t)})=0$ $(Y_i^{(t)}\,Y_m)=0$ si giunge facilmente alla conclusione che le B sono tutte costanti. Ma allora le seconde delle (24), che si possono pure scrivere $\sum_1^r \mathrm{B}_{r_1+hk}\,\xi_k=0$, ci dicono, appena che si ricordi che le ξ sono indipendenti, che tutte le B i cui secondi indici sono $\leq r$ sono nulle, e che le (24), (26) si riducono rispettivamente alle

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \eta_{r_1+h}}{\partial x_i}=\sum_k^{r-r_1}{}_k \mathrm{B}_{r_1+hr+k}\frac{\partial \eta_{r+k}}{\partial x_i}\qquad (i=1\ldots n\,,\ h=1\ldots n-r_1)\\
&\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_k}=\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_k}=0\qquad (k=1\ldots r)\\
&\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r+k}}=-\sum \mathrm{B}_{r_1+hr+k}\frac{\partial \boldsymbol{H}_j^{(t)}}{\partial x_{r_1+h}}\qquad (k=1\ldots r_1-r)\\
&\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_{r+k}}=-\sum \mathrm{B}_{r_1+hr+k}\frac{\partial \eta_{r+j}}{\partial x_{r+h}}\qquad (k=1\ldots r_1-r)
\end{aligned}
$$

E si giungerà infine alla conclusione che, mediante la trasformazione indipendente da t

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
&x_1'=x_1\,,\ x_2'=x_2\,,\ldots,\ x_r'=x_r\,,\ x_{r+1}'=x_{r+1}\,,\ldots,\ x_{r_1}'=x_{r_1}\\
&x_{r_1+h}'=x_{r_1+h}-\mathrm{B}_{r_1+hr+1}\,x_{r+1}-\cdots-\mathrm{B}_{r_1+hr_1}\,x_{r_1}\,,
\end{aligned}
$$

(1) Si noti che per le seconde delle (24) queste equazioni sono identiche alle (20).

la quale opera soltanto sulle $x_{r+1} \dots x_n$ e quindi non muta la forma già assegnata per la Yf nel teorema del n. 2, si potrà portare la $Y^{(t)}f$ nella forma

$$Y^{(t)}f = H_1^{(t)} p_1 + \cdots + H_r^{(t)} p_r + \eta_{r+1} p_{r+1} + \cdots + \eta_{r_1} p_{r_1} + \cdots$$

i termini tralasciati essendo di ordine $> s$, dove le $H_1^{(t)} \dots H_r^{(t)}\, \eta_{r+1} \dots \eta_{r_1}$ sono funzioni indipendenti di $x_{r_1+1}, x_{r_1+2}, \dots, x_n, t$. Si noti che dovrà quindi essere $r_1 \leq n - r_1 + 1$.

È chiaro ormai che allo stesso modo si può procedere qualora fossero più di due le operazioni di ordine s di G, quindi si può conchiudere col teorema annunciato:

Se un gruppo transitivo G *nello spazio ad n dimensioni possiede* τ_s *operazioni di ordine massimo* $s > 4$, *si può con una trasformazione lineare portare tali operazioni contemporaneamenete nella forma*

$$Yf = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \cdots + \xi_r p_r + \cdots$$

dove i termini tralasciati sono di ordine $> s$ *e le* $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_r$ *sono solo funzioni di* $x_{r+1} x_{r+2} \dots x_n$. *Sarà quindi necessariamente* $r < n$. *Di più r soddisfarà alla diseguaglianza* $r \leq n - r + \tau_s$ *ossia* $\leq r \left[\frac{n+\tau_s}{2}\right]$.

Si noti che lo stesso si può dire per le operazioni di ordine s' tali che $2s' - 4 > s$.

Osservazione. — Per $n = 2, 3$ il teorema vale appena $s > 2$ (o $2s' - 2 > s$).

Mineralogia. — *L'acqua nell'heulandite di Montecchio Maggiore* (1). Nota di Angelo Antonio Ferro, presentata dal Socio G. Struever.

Prima del 1896 le numerose ricerche intorno alla quantità d'acqua contenuta nelle heulanditi, alla sua eliminazione e ripresa per riscaldamento e abbassamento di temperatura, e gli studî sul contegno ottico del minerale non avevano conseguito ancora tali risultati che stabilissero in modo definitivo e con tutta sicurezza la natura dei legami fra l'acqua e il sale anidro (2).

(1) Lavoro incominciato nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Genova ed ultimato nel Gabinetto di Scienze naturali del R. Liceo di Sondrio.

(2) Fra le principali pubblicazioni in merito a queste ricerche sono a notarsi: M. A. Damour, (Ann. de Ch. et Ph. 1858, 53, 438; P. Jannasch, (Neues Jahrb. f. Min. Geol. und P. 1881, 2); E. Mallard, *De l'action de la chaleur sur la heulendite* (Bull. Soc. Min. de France, 1882, 5); P. Jannasch, *Ueber die Bestimmung des aus Mineralien durch Trockenmittel* ect. (Neues Jahrb. für Min. Geol. u. P. 1884, 2); P. Jannasch, *Die Zusammersetzung des Herlendit's von Andreasberg* ect. (Neues Jahrb. für Min. Geol. u. P. 1887, 39); C. Hersch, *Der Warzergehelt der Zeolithe* (Zeitsch. f. Kr. u. Min. 1887, 17, 216).