ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

è collocato contro la finestra F. Dopo di che si fa una terza esperienza identica alla prima, poi una identica alla seconda, e così di seguito.

È chiaro, che se il radio conferisce effettivamente al dielettrico una certa conducibilità, la deviazione dell'elettrometro nelle esperienze, nelle quali interviene il radio, sarà minore di quella osservata nelle altre. E questo fu il risultato da me avuto dapprima.

Senonchè certe particolarità del fenomeno mi misero in sospetto, e mi consigliarono a cambiare il segno della carica data all'armatura L, che era stata sempre positiva. Invertiti i poli della batteria, s'invertì anche il risultato, e cioè ottenni deviazioni maggiori nelle esperienze col radio. L'effetto osservato non era dunque quello aspettato, ed in breve mi persuasi che si trattava semplicemente della carica negativa ceduta alla lastra L dai raggi β, come in una nota esperienza dei coniugi Curie. Messo infatti L ed E scarichi in reciproca comunicazione abbassando R, ottenni subito una deviazione negativa collocando il radio contro la finestra R.

Cercando di tener conto di questo fenomeno, che evidentemente avrebbe dovuto esser preso in considerazione da quelli che si occuparono della questione qui studiata, non mi è stato possibile mettere in evidenza un aumento di conducibilità della colofonia. Perciò, se davvero i raggi del radio producono un tale effetto non solo nei liquidi poco conduttori, ma anche nei dielettrici solidi, esso deve essere piccolissimo, e non potrà essere considerato come dimostrato, senza nuove e più delicate ricerche sperimentali.

Matematica. — *Sui gruppi transitivi dello spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI [1], presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

II.

4. Il Lie dimostra [2] che un gruppo primitivo dello spazio ad n dimensioni non può contenere operazioni di ordine $> 2n + 1$. Egli però esprime l'opinione che tale limite sia assai troppo alto e che un gruppo primitivo non possa contenere operazioni > 2. Io voglio mostrare, come conseguenza del teorema generale dato nel n. precedente, che *un gruppo primitivo non può contenere operazioni di ordine* > 4.

Premetto perciò un teorema sui gruppi primitivi. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo* G *sia imprimitivo, è che esista in esso un gruppo intransitivo contenente tutte le operazioni di ordine* > 0 *e qualche operazione di ordine* 0 *in un punto generico* O. La condizione è

[1] V. pag. 133.

[2] Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, Dritter Abschnitt, pag. 313.

necessaria: infatti sia V la varietà minima di imprimitività passante per O; il sottogruppo Γ di G che trasforma V in sè contiene tutte le operazioni di G di ordine > 0 rapporto ad O, poichè queste appartengono al gruppo di stabilità di O e quindi trasformano in sè V, e contiene qualche operazione di ordine 0 poichè Γ agisce transitivamente in V. Inversamente la condizione è pure sufficiente. Infatti si noti che si può senz'altro supporre G transitivo, altrimenti esso è certo imprimitivo. Ciò posto, sia Γ un sottogruppo che contenga tutte le operazioni di ordine > 0 e qualche operazione di ordine 0 in O; sia V la varietà dei punti in cui O è portato da Γ, questa conterrà altri punti oltre ad O poichè Γ contiene delle operazioni di ordine 0 in O. Sia P un punto qualunque dello spazio, trasformato di O per l'operazione σ; sia V_P la trasformata per σ di V; io dico che le varietà V_P formano una divisione dello spazio e che sono varietà di imprimitività di G. Per il primo punto occorre mostrare: 1° che qualunque sia l'operazione σ che porta O in P, sempre si ha la stessa V_P; 2° che se Q è di V_P, $V_Q = V_P$. Ora se $P = \sigma(O) = \sigma_1(O)$, l'operazione $\gamma = \sigma^{-1}\sigma_1$ è un'operazione del gruppo di stabilità di O e quindi è un'operazione γ di Γ; perciò sarà $\gamma(V) = V$ e $\sigma_1(V) = \sigma\gamma(V) = \sigma(V) = V_P$; quindi sia σ che σ_1 portano V in una stessa V_P. Se poi Q è di V_P esso è il trasformato per σ di un conveniente punto M di V; $Q = \sigma(M)$; ed il punto M, appartenendo a V, è il trasformato di O per una trasformazione γ di Γ, quindi $Q = \sigma\gamma(O)$. La varietà V_Q sarà quindi $V_Q = \sigma\gamma(V)$; ma, γ essendo di $\Gamma, \gamma(V) = V$, quindi $V_Q = \sigma(V) = V_P$.

Le V_P formano quindi una divisione dello spazio in varietà; ma di più esse sono varietà di imprimitività di G, perchè, se P e P_1 sono due punti qualunque ed è $P_1 = \tau(P)$, un punto qualunque Q di V_P va per τ in un punto di V_{P_1}. Infatti, posto $P = \sigma(O)$, sarà $P_1 = \tau\sigma(O)$, quindi $V_{P_1} = \tau\sigma(V) = \tau(V_P)$. È così completamente dimostrato l'assunto.

5. Basandoci su questo teorema e sul teorema del n. 3 (Nota 1ª), possiamo ormai dimostrare che:

Un gruppo che contiene operazioni di ordine > 4 in un suo punto generico è imprimitivo.

Se infatti un gruppo è intransitivo, esso è imprimitivo. Possiamo dunque limitarci a considerare un gruppo G transitivo. Se esso contiene operazioni di ordine > 4 si può applicare il teorema del n. 3; siano le operazioni di ordine massimo di G ridotte nella forma data da tale teorema: le funzioni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, coefficienti di $p_1, p_2, \dots, p_r$ nelle varie operazioni di ordine massimo, sono funzioni di $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ soltanto; noi supporremo che esse siano ridotte con una trasformazione lineare a contenere il minimo numero di variabili possibile e che queste siano le $x_{r'+1}, x_{r'+2}, \dots, x_n$: sarà $r' \geq r$. L'insieme delle operazioni di G di ordine > 0 e delle $X_1 f, X_2 f, \dots, X_{r'} f$ forma un gruppo. Infatti l'alternata di due operazioni di ordine > 0 o di una operazione di ordine > 1 e di una di ordine 0 è una operazione di ordine > 0: quindi per dimostrare l'assunto basta dimostrare che l'alternata di una operazione di ordine 1, con una delle $X_1 f, \ldots, X_{r'} f$ o di due di queste è ancora una operazione del gruppo. Ora, se così non fosse, tale alternata Zf dovrebbe contenere una operazione $X_{r'+i} f$; e quindi per l'ipotesi che le ξ delle operazioni di ordine massimo contengano tutte le $x_{r'+1}, \ldots, x_n$, la Zf alternata con una conveniente Yf di ordine s darebbe una operazione di ordine $s-1$. Ora sia, ad esempio, Zf alternata di due operazioni di ordine 0: $Zf = (X_i X_j)\ (i, j \leq r')$, sarà $(Z\,Y) = ((X_i X_j)\,Y) = (X_i (X_j)\,Y) + ((X_i\,Y) X_j)$. Ma $(X_j Y)$ ed $(X_i Y)$ sono ambedue operazioni nulle o di ordine s poichè le ξ non contengono le $x_1 x_2, \ldots, x_{r'}$; quindi ancora le $(X_i (X_j Y))$ e $((X_i Y) X_j)$ sono operazioni di ordine s, oppure nulle, e tale è pure (ZY); talchè si deve conchiudere che la Zf non può contenere nessuna operazione $X_{r'+i} f$. Affatto analoga è la dimostrazione qualora la Zf fosse l'alternata di due operazioni di cui una fosse $X_i f (i \leq r')$ e l'altra fosse una operazione di ordine 1. Conchiuderemo quindi che le operazioni da noi scelte formano un gruppo, il quale sarà evidentemente intransitivo e soddisfarà a tutte le condizioni del n. 4. Quindi per il n. 4 il gruppo G è imprimitivo; donde il nostro teorema.

Possiamo quindi enunciare il corollario:

Un gruppo primitivo non può contenere operazioni di ordine > 4.

III.

6. Il Lie (1) chiama *appartenenti ad una stessa classe* due gruppi transitivi in n variabili le cui operazioni di ordine 0 ed 1 incominciano cogli stessi termini di ordine minimo. Siccome il gruppo è transitivo esso contiene n operazioni della forma $p_1 + \ldots, p_2 + \ldots, p_n + \ldots$, quindi l'ipotesi che il gruppo sia transitivo ci esime dal tener conto dell'ipotesi che esso abbia gli stessi termini di ordine 0 nelle operazioni di ordine 0. Ricordando poi che i termini di ordine 1 delle operazioni di ordine 1 costituiscono il gruppo indotto sugli elementi lineari, noi potremo dire che *due gruppi transitivi appartengono ad una stessa classe quando hanno lo stesso gruppo indotto negli elementi lineari.* Dato un gruppo lineare omogeneo su n variabili, le operazioni infinitesime di tale gruppo associate colle operazioni $p_1, p_2, \ldots, p_n$ generano un gruppo pel quale il gruppo indotto sugli elementi lineari è il gruppo omogeneo dato; quindi *dato un gruppo lineare omogeneo, esiste una classe cui esso appartiene e viceversa.*

Il Lie dice poi *appartenenti ad una stessa sottoclasse* (2) quei gruppi di data classe le cui operazioni di ordine massimo s hanno lo stesso ordine:

(1) Lie-Engel, Erster Abschnitt, cap. 28, pp. 603-604.
(2) Loc. cit., pag. 606.

diremo s *indice della sottoclasse*. Quale applicazione del nostro teorema fondamentale vogliamo ancora dare alcuni teoremi sulle sottoclassi di una classe data che, mentre illuminano la natura di tale classificazione, possono utilmente servire negli studi per la determinazione dei gruppi transitivi ad n dimensioni.

7. Premettiamo una osservazione. Quando un gruppo appartiene ad una data classe e sottoclasse, il gruppo formato dai termini di ordine minimo dello sviluppo in serie delle operazioni del gruppo dato, che noi diremo *gruppo accorciato*, è un gruppo che appartiene alla stessa classe e sottoclasse del gruppo dato. Quindi nelle ricerche seguenti circa l'esistenza o no di gruppi di una data classe e sottoclasse, ci potremo limitare a considerare gruppi accorciati: tali cioè che le loro operazioni, sviluppate in serie nell'origine (supposta, come sempre, punto generico del gruppo), constino dei soli termini di ordine minimo; od ancora tali che i coefficienti di ogni loro operazione infinitesima nella distribuzione canonica secondo l'ordine siano forme di uno stesso grado.

Si consideri ora una classe che ammetta sottoclassi di indice $s > 4$, ed un gruppo accorciato appartenente ad essa: pel teorema del numero 3 le operazioni Yf di ordine s conterranno i soli simboli $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ed i loro coefficienti le sole variabili $x_{r+1}\, x_{r+2} \ldots x_n$. Poniamo

$$Y_i f = (Yp_i) \quad Y_{i_1 i_2} f = ((Yp_{i_1}) p_{i_2}) \ldots Y_{i_1 i_2 \ldots i_s} f_1 = (((Yp_{i_1}) p_{i_2}) \ldots p_{i_s})$$

Queste operazioni sono tutte appartenenti al gruppo e come Yf non conterranno che $p_1, p_2, \ldots, p_r$ e le variabili $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Le operazioni $Y_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1}}$ sono di ordine 1 ed appartengono quindi al gruppo lineare omogeneo che individua la classe. Due operazioni qualunque $Y_{i_1 i_2 \ldots i} f$, $Y_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} f$ sono permutabili, perchè non contengono che i simboli $p_1 p_2 \ldots p_r$ e le variabili $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Infine l'alternata di una operazione $Y_{i_1 i_2 \ldots i_h} f$ con una operazione Zf di ordine 1 è una combinazione lineare di operazioni $Y_{i'_1 i'_2 \ldots i'_h} f$. Infatti, ammettiamo il teorema dimostrato per le $Y_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}} f$; lo si dimostra immediatamente per le $Y_{i_1 i_2 \ldots i_h} f$ mediante l'identità Jacobiana. Si ha

$$(ZY_{i_1 i_2 \ldots i_h}) = (Z(_i Y_{_1 i_2 \ldots i_{h-1}} p_{i_h})) = ((ZY_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}}) p_{i_h}) + (Y_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}} (Zp_{i^h})).$$

Ma $(ZY_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}})$ è per ipotesi una combinazione lineare di $Y_{i'_1 i'_2 \ldots i'_{h-1}} f$ quindi $((ZY_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}}) p_{i_h})$ è una combinazione lineare di $Y_{i'_1 i'_2 \ldots i'_h} f$. D'altra parte (Zp_{i_h}) è una operazione di ordine 0, quindi una combinazione lineare di p_i e quindi pure $(Y_{i_1 i_2 \ldots i_{h-1}} (Zp_{i_h}))$ è una combinazione lineare di $Y'_{i_1 i_2 \ldots i'_h} f$. Ne segue che $(ZY_{i_1 i_2 \ldots i_h})$ è pure una combinazione lineare di $Y_{i_1 i_2 \ldots i_h} f$.

Siccome poi una (ZY) è ancora una Yf di ordine s, il teorema è dimostrato in generale.

Applichiamo queste osservazioni alle $Y_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} f$ che, come già si osservò, appartengono al gruppo lineare omogeneo che determina la classe: si avrà che

Affinchè una classe ammetta sottoclassi di indice $s > 4$ *è necessario che nel gruppo delle operazioni di ordine* 1 *che individua la classe, esista un sottogruppo abeliano invariante che con opportuno cambiamento di variabili si possa portare ad operare sulle sole prime* r *variabili con coefficienti funzioni delle residue* $n - r$ *variabili.*

Viene così ad essere assegnato un limite assai basso all'indice delle sottoclassi per una estesa categoria di classi (¹).

8. Si abbia ora nel gruppo lineare omogeneo che individua la classe un sottogruppo S di tale proprietà e supponiamo esista una operazione Yf di ordine s tale che alternata $(s-1)$-volte con $p_1, p_2, \dots, p_n$ dia una combinazione lineare delle operazioni del nostro sottogruppo. In altri termini, se le operazioni del sottogruppo S sono

$$\sum_1^r {}_j\, \eta_{j1}\, p_j\,, \quad \sum_{1\,j}^r \eta_{j2}\, p_j\,, \dots, \sum_1^r \eta_{jm}\, p_j$$

dove $\eta_{ji} = \sum_1^{n-r} {}_k\, a_{ik}^{(j)}\, x_{r+k}$, supponiamo che esista una operazione $Yf = \sum_1^r \xi_j\, p_j$ di ordine s tale che le derivate omonime di ordine $s-1$ delle ξ_j siano le stesse combinazioni lineari delle η_{ji} al variare di j. Esisterà allora un gruppo appartenente alla classe data ed alla sottoclasse di indice s contenente Yf. Infatti, indichiamo con Zf le operazioni d'ordine 1 del gruppo, e consideriamo insieme con Yf tutte le alternate (YZ): esse sono tutte operazioni d'ordine s (o nulle). Facciamo l'alternata di queste operazioni con le $p_1 p_2 \dots p_n$ successivamente $1\,.\,2 \dots s$ volte. L'insieme delle operazioni così ottenute e di quelle assegnate di ordine 0 ed 1 forma un gruppo. Ed invero, pel modo stesso in cui furono costruite queste operazioni, ogni alternata di esse con operazioni di ordine 0 appartiene a tale insieme (od è nulla). L'applicazione successiva dell'identità Jacobiana dimostra inoltre, in modo analogo a quello tenuto nel n. precedente, che l'alternata di una delle operazioni già assegnate di ordine 1 con una qualunque altra appartiene all'insieme. Quanto alle residue alternate di due operazioni di cui nessuna

(¹) Il Lie si pone (cfr. loc. cit., pag. 608) il problema se esiste un massimo per l'indice delle sottoclassi di una data classe; ma non lo risolve affatto. Solo nel cap. 29 del primo volume il Lie risponde a tale domanda pel caso che il gruppo sugli elementi lineari che individua la classe sia il gruppo lineare omogeneo generale o speciale, nel qual caso l'indice della sottoclasse è ≤ 2. Su questa questione si confronti pure il teorema finale del n. seguente.

è di ordine 0, od è di quelle già assegnate di ordine 1, è facile dimostrare che esse sono tutte nulle. Basterà perciò mostrare che queste operazioni contengono i soli simboli $p_1, p_2 \dots, p_r$ e le sole variabili $x_{r+1}\, x_{r+2} \dots x_n$. Ora cominciamo dal considerare una operazione (YZ). È questa una operazione di ordine s: alternandola con operazioni p_i si ha

$$((ZY)p_{i_1}) = (Z(Yp_{i_1})) - (Y(Zp_{i_1})) = (ZY_{i_1}) + \Sigma a_l (Yp_l) = (ZY_{i_1}) + \Sigma a_l Y_l f,$$
$$(((ZY)p_{i_1})p_{i_2}) = ((ZY_{i_1})p_{i_2}) + \Sigma a_l Y_{li_2} f = (Z(Y_{i_1} p_{i_2})) - (Y(Zp_{i_2})) + \Sigma a_l Y_{li_2} f =$$
$$= (ZY_{i_1 i_2}) + \Sigma b_s Y_{i_1 s} f + \Sigma a_l Y_{li_2} f$$

. . . .

Ripetendo questa operazione $s - 1$ volta, si riduce infine ad una combinazione lineare di $Y_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} f$ e di una $(ZY_{i_1 i_2, \dots i_{s-1}})$; ma $Y_{i_1 i_2 \dots {s-1}} f$ è per ipotesi di S, quindi anche $(Y_{i_1 i_2 \dots, i_{s-1}} Z)$ è di S. Ne segue che ogni $(s - 1)$-*esima* alternata di (ZY) con operazioni p_i è una operazione di S, non contiene cioè che i simboli $p_1, p_2, \dots p_r$ e le variabili $x_{r+1}, \dots, x_n$; e lo stesso deve avvenire quindi per (YZ).

Dimostrata così la cosa per le operazioni di ordine s del nostro insieme essa risulta anche per le residue per il modo con cui esse furono costruite. Le nostre operazioni formano quindi un gruppo. Di più le operazioni di ordine 1 non sono altro che quelle assegnate a priori, poichè quelle che si ottengono alternando $s - 1$ volta operazioni di ordine s con operazioni d'ordine 0 appartengono, come or ora si è osservato, al sottogruppo S: quindi il gruppo costruito appartiene effettivamente alla classe assegnata.

Possiamo dunque dalle discussioni di questi ultimi numeri raccogliere:

Dato un gruppo lineare omogeneo esso determina una classe: per costruire, se esistono, i gruppi accorciati della classe appartenenti a sottoclassi di indice $s > 4$, è necessario:

1°. *Determinare i sottogruppi invarianti intransitivi abeliani del gruppo lineare omogeneo assegnato, e tali che le operazioni di tali sottogruppi si possano con una trasformazione di variabili portare ad operare sulle sole prime r variabili mentre i loro coefficienti contengono le residue $n - r$.*

2°. *Indicate le operazioni di ordine* 1 *di tale sottogruppo con*

$$\sum_1^r{}_j\, \eta_{j1}\, p_j\,,\ \ \sum_1^r{}_j\, \eta_{j2}\, p_j\,, \dots \sum_1^r{}_j\, \eta_{jm}\, p_j \qquad \left(\eta_{ji} = \sum_1^{n-r} a_{ji}^{(h)}\, x_{r+h}\right),$$

determinare, se possibile, r forme di grado s ξ_j tali che le loro derivate $(s - 1)$esime omonime siano le stesse combinazioni lineari delle η_{ji} al variare di j.

Esisteranno allora dei gruppi della classe data e della sottoclasse di indice s contenenti l'operazione $Yf = \Sigma \xi_j p_j$ ed il minimo di essi si costruisce facendo le alternate di Yf con le operazioni assegnate di ordine 1, e di tutte le operazioni così ottenute con le operazioni di ordine o successivamente $1, 2, \ldots, s-2$ volte.

Possiamo trarre di qui un semplice corollario:

Se una classe ammette sottoclassi di indice $s > 4$, *ammette sottoclassi di indice* $s-1, s-2, \ldots, 2, 1$. Infatti se esistono delle forme ξ_j di grado s che soddisfanno le condizioni del precedente teorema, esisteranno analoghe forme di grado $s-1$; ad esempio le derivate delle ξ_j stesse rispetto ad una determinata variabile. Possiamo quindi anche dire che *dato un numero* $s > 4$, *se una classe non ammette sottoclassi di indice* s, *il massimo degli indici delle sottoclassi della classe data è* $< s$.

Fisica. — *Ulteriori ricerche sulla luminescenza catodica nei cristalli.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

Dalle ricerche del Maskeline [1], dello Schmidt [2] e mie [3] risulta che in molti casi un cristallo emette sotto l'azione dei raggi catodici una luminescenza parzialmente polarizzata in un piano che è in una certa relazione colla direzione degli assi di simmetria del cristallo. Portare un contributo alla conoscenza dell'ammontare di questa polarizzazione per diverse forme cristalline è precisamente lo scopo delle presenti ricerche, le quali per le difficoltà incontrate nel procurarmi un materiale di osservazione adatto, furono dovute limitare ad un numero piuttosto ristretto di cristalli scelti in gran parte fra quelli già ricordati nella mia Nota precedente.

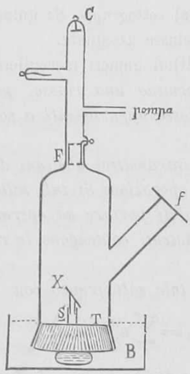

Fig. 1.

In queste ricerche ho adoperato un tubo a vuoto, costruito come rilevasi dalla qui annessa figura schematica.

L'estremità del tubo, di fronte al catodo C, è chiusa da un tappo T di vetro smerigliato e, per assicurare meglio la chiusura, è immersa in una bacinella B ripiena di mercurio; il pennello di raggi catodici prima di giungere sulla faccia cristallina X da studiare deve attraversare un filtro F messo in comunicazione col suolo; il cristallo è sostenuto nella posizione voluta da una colonnina S di vetro fissata nel mezzo del tappo di vetro smerigliato e composta di due pezzi di tubo scorrenti uno dentro

[1] Proc. Roy. Soc. London, 28, 1879, pag. 477.
[2] Wied. Ann. 60, 1897, pag. 761.
[3] Rend. R. Acc. Lincei, Roma, 2° sem. 1904, pag. 301.