

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVICCI

1905

nosce che l'intensità del suono passando dalla corrente  $i$  alla  $2i$  è raddoppiata, diventa tripla passando da  $i$  a  $3i$ , e quadrupla da  $i$  a  $4i$ . Tutto ciò è ben chiaro se si rammenta il principio di Weber, pel quale, onde ottenere un aumento percettibile della sensazione, occorre che l'aumento dell'eccitazione sia sempre la stessa frazione dell'eccitazione iniziale.

**Fisica.** — *Su di un apparecchio per la misura assoluta del coefficiente di attrito interno dei gas* <sup>(1)</sup>. Nota di SILVIO CHELLA presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Il metodo di Coulomb per la misura assoluta del coefficiente di attrito interno dei fluidi, benchè si raccomandi per la semplicità e per l'accordo delle osservazioni, urta però, come l'ebbe a riconoscere lo stesso Meyer, contro gravi difficoltà di calcolo quando si voglia tener conto con sufficiente precisione dell'influenza degli orli del disco oscillante.

Accingendomi alla determinazione del coefficiente di attrito interno dei gas a bassissime temperature, ho ritenuto opportuno studiare una disposizione sperimentale colla quale si ovviasse all'inconveniente accennato. Potei riuscire nell'intento usando per apparato oscillante non più il disco ma una campana cilindrica, giacchè con questa forma, variando convenientemente la densità, si possono conservare i diametri, il peso e il momento di inerzia pur avendo un'altezza diversa.

È agevole concepire come confrontando gli smorzamenti ottenuti con due tali apparati fatti oscillare nel vano compreso fra due campane fisse, vicinissime e coassiali alle superfici di quelle mobili, si possano eliminare gli errori prevenienti dal bordo.

Non potendo però applicare a tale sistema le formole del Meyer valide solo nel caso dello spazio indefinito, ho trattato la teoria di un cilindro oscillante nelle condizioni su esposte. Le formole da me trovate, a differenza di quelle del Meyer, valgono per qualsiasi dimensione dei raggi.

Quando la campana cilindrica oscilla, mette in movimento il fluido compreso fra le campane immobili, e, data la ristrettezza dello spazio preso in considerazione, potremo ammettere che, lungi dai bordi, le superfici di ugual velocità angolare siano piane orizzontali tra i fondi piani delle campane, e cilindriche coassiali nello spazio limitato della parte cilindrica delle campane stesse.

In vicinanza degli orli sia superiori che inferiori, vi è una zona in cui la distribuzione della velocità angolare non è certamente, nè a strati cili-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica nella R. Università di Pisa.

drici nè a strati piani. Sarebbe difficile calcolare esattamente i termini di correzione relativi a tale zona; possiamo però fare a meno di ricercarli giacchè nel metodo differenziale da me proposto (vedi pag. 23) essi non vengono a figurare.

Può sembrare per la stessa ragione superfluo tener conto dell'attrito che si esercita sulle basi piane; tuttavia, trattandosi di un termine più importante, ho creduto opportuno calcolarlo affinchè nell'applicazione del metodo si possano evitare gli errori provenienti da piccolissime differenze dei raggi e dei momenti di inerzia inevitabili in pratica.

La velocità angolare  $\psi$  deve, come sappiamo (1), soddisfare all'equazione.

$$(1) \quad \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = A_2 \psi = \eta \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\}$$

dove  $\varrho$  è la densità del fluido,  $\eta$  il suo coefficiente di viscosità,  $h$  la variabile secondo l'asse di oscillazione ed  $r$  la distanza da questo. La  $\psi$  si deve annullare nelle pareti delle campane fisse e deve soddisfare all'equazione

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt}$$

sul cilindro mobile  $\varphi$  essendo l'angolo del quale esso è spostato al tempo  $\pm$

Nel nostro caso conviene porre

$$\varphi = - \sum \frac{C}{m^2} e^{-m^2 t}$$

dove  $C$  sono costanti ed  $m$  una quantità complessa da cui dipende il decremento logaritmico e il periodo dell'oscillazione.

Per quanto si è detto, è lecito spezzare la ricerca della  $\psi$  in due parti: l'una riguardante l'attrito prodotto nella parte cilindrica, l'altra relativa a quello esercitato fra le basi piane. Per questa parte, riguardando il fondo della campana oscillante come un disco mobile fra due piani fissi,  $\psi$  diventa funzione della sola  $h$  e di  $t$  di modo che avremo:

$$(2) \quad \varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2}$$

A tale equazione si può nel nostro caso soddisfare con una sommatoria di integrali particolari della forma

$$\psi = \Omega(h) e^{-m^2 t}$$

con  $\Omega(h)$  che si annulla sui dischi fissi e si riduce alla costante  $C$  sulle facce del disco mobile. Son così anche soddisfatte le condizioni al contorno perchè nel disco  $\psi$  si riduce a  $\sum C e^{-m^2 t} = \frac{d\varphi}{dt}$ . Si vede immediatamente

(1) Meyer, Wied. Ann. vol. 31, pag. 642; 1887.

che per  $\Omega$  si ha l'equazione

$$\Omega''(h) + q^2 \Omega(h) = 0 \quad \text{con } q^2 = \frac{g}{\eta} m^2$$

di cui l'integrale generale è

$$\Omega(h) = A \sin(qh + \alpha)$$

Se dunque indichiamo con  $-\bar{c}_1$  la distanza del disco mobile dal disco fisso sottostante e  $\bar{c}_2$  quella dal sovrastante; con  $\psi_1$  la  $\psi$  relativa al fluido sottostante e  $\psi_2$  quella relativa al fluido sovrastante e con  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  le corrispondenti  $\Omega(h)$  si ha

$$(3) \quad \begin{aligned} \Omega_1(h) &= C \frac{\sin q(c_1 + h)}{\sin q\bar{c}_1} & \Omega_2(h) &= C \frac{\sin q(\bar{c}_2 - h)}{\sin q\bar{c}_2} \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial h}\right)_{h=0} &= Cq \cotg q\bar{c}_1 e^{-m^2 t} & \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial h}\right)_{h=0} &= Cq \cotg q\bar{c}_2 e^{-m^2 t} \end{aligned}$$

ove potremo sviluppare  $\cotg qc$  secondo lo sviluppo facilmente deducibile

$$(4) \quad \cotg y = \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{(2y)^2}{12} + \frac{(2y)^4}{6} - \frac{(2y)^6}{6} + \dots \right)$$

In quanto alla  $\psi$  nello spazio limitato fra le pareti cilindriche, potendosi ritenere indipendente da  $h$ , dov'è soddisfare l'equazione

$$(5) \quad e \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\}$$

che al solito potrà integrarsi con una sommatoria della forma

$$\psi = \sum C P(r) e^{-m^2 t}$$

dove  $P(r)$  soddisfa all'equazione

$$(6) \quad P''(r) + \frac{3}{r} P'(r) + q^2 P(r) = 0$$

e si deve ridurre a zero sulle pareti immobili e ad uno sul cilindro oscillante.

L'equazione si integra colle funzioni cilindriche di Bessel che si possono porre sotto forma di integrali definiti; però è tale la difficoltà che si presenta nel calcolo che ho preferito integrarla per altra via <sup>(1)</sup>.

La  $P(r)$  è una funzione regolare nell'intorno del punto  $R$  ove  $R$  è il raggio del cilindro mobile; potrà perciò svilupparsi in serie di potenze intere e positive di  $r - R$ :

$$(7) \quad P(r) = a_0 + a_1(r - R) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(r - R)^n$$

dovendo essere  $P(R) = 1$  si avrà  $a_0 = 1$

<sup>(1)</sup> Essendo necessario introdurre nel calcolo anche la funzione di Bessel di seconda specie, la quale presenta una singolarità nel punto  $r = 0$ ; gli sviluppi già noti relativi a tal punto non convengono al nostro caso.

Osserviamo poi che quel che a noi importa di calcolare è  $a_1$  perchè per le applicazioni che ne dobbiamo fare basta poter conoscere  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  nel punto R.

Dalla (7) si deduce

$$P'(r) = a_1 + \sum_2^{\infty} n a_n (r - R)^{n-1}$$

$$P''(r) = \sum_2^{\infty} n(n-1) a_n (r - R)^{n-2};$$

di più osserviamo che si ha

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(r - R) + \frac{1}{R^3}(r - R)^2 - \frac{1}{R^4}(r - R)^3 + \frac{1}{R^5}(r - R)^4 - \frac{1}{R^6}(r - R)^5 + \dots$$

sviluppo che è convergente per  $|r - R| < R$

Di qui si ha:

$$P'(r) = \frac{a_1}{R} + \left( \frac{2a_2}{R} - \frac{a_1}{R^2} \right) (r - R) + \left( \frac{3a_3}{R} - \frac{2a_2}{R^2} + \frac{a_1}{R^3} \right) (r - R)^2 + \left( \frac{4a_4}{R} - \frac{3a_3}{R^2} + \frac{2a_2}{R^3} - \frac{a_1}{R^4} \right) (r - R)^3 + \left( \frac{5a_5}{R} - \frac{4a_4}{R^2} + \frac{3a_3}{R^3} - \frac{2a_2}{R^4} + \frac{a_1}{R^5} \right) (r - R)^4 + \dots$$

Sostituendo in (6) ed uguagliando a zero i coefficienti di una stessa potenza otteniamo:

$$2a_2 + \frac{3a_1}{R^2} + q^2 = 0$$

$$3 \cdot 2a_3 + 3 \left( \frac{2a_2}{R} - \frac{a_1}{R^2} \right) + q^2 a_1 = 0$$

.....

da cui si ricavano successivamente per  $a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$  i valori

$$a_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{3a_1}{R} + q^2 \right) \quad a_3 = \left( \frac{2}{R^2} - \frac{q^2}{6} \right) + \frac{2}{2R} q^2$$

$$a_4 = -\left( \frac{5}{2R^3} - \frac{q^2}{4R} \right) a_1 - \frac{5}{8} \frac{q^2}{R^2} + \frac{1}{24} q^4$$

$$a_5 = \left( \frac{3}{R^4} - \frac{13}{40} \frac{q^2}{R^2} + \frac{q^4}{120} \right) a_1 + \frac{3}{4} \frac{q^2}{R^3} - \frac{1}{20} \frac{q^4}{R}$$

Introdotti questi in (7) e indicato con  $R + c$  il valore di  $r$  sulle superfici cilindriche delle campane fisse, dovendosi avere

$$P(R + c) = 0$$

sarà anche

$$a_1 \left[ c - \frac{3}{2} \frac{c^2}{R} + \left( \frac{2}{R^2} - \frac{q^2}{6} \right) c^3 - \left( \frac{5}{2R^3} - \frac{q^2}{4R} \right) c^4 + \left( \frac{3}{R^4} - \frac{13}{40} \frac{q^2}{R^2} + \frac{q^4}{120} \right) c^5 + \dots \right] + \\ + 1 - \frac{q^2}{2} c^2 + \frac{1}{2R} q^2 c^3 + \left( -\frac{5}{8} \frac{q^2}{R^2} + \frac{1}{24} q^4 \right) c^4 + \left( \frac{3}{4} \frac{q^2}{R^3} - \frac{1}{20} \frac{q^4}{R} \right) c^5 + \dots = 0$$

da cui

$$a_1 = \frac{1}{c} \frac{1 - \frac{q^2}{2} c^2 + \frac{1}{2R} q^2 c^3 + \left( -\frac{5}{8} \frac{q^2}{R^2} + \frac{1}{24} q^4 \right) c^4 + \left( \frac{3}{4} \frac{q^2}{R^3} - \frac{1}{20} \frac{q^4}{R} \right) c^5 + \dots}{1 - \frac{3}{2} \frac{c}{R} + \left( \frac{2}{R^2} - \frac{q^2}{6} \right) c^2 - \left( \frac{5}{2R^3} - \frac{q^2}{4R} \right) c^3 + \left( \frac{3}{R^4} - \frac{13}{40} \frac{q^2}{R^2} + \frac{q^4}{120} \right) c^4 + \dots}$$

Calcolando il coefficiente di  $\frac{1}{c}$  con la nota regola del quoziente di due serie si ha

$$a_1 = -\frac{1}{c} \left[ 1 + \frac{3}{2R} c + \left( \frac{1}{4R^2} - \frac{q^2}{3} \right) c^2 - \frac{1}{8R^3} c^3 + \left( \frac{1}{16R^4} + \frac{1}{30} \frac{q^2}{R^2} - \frac{1}{45} q^4 \right) c^4 + \dots \right]$$

Chiamando  $c_2$  il valore di  $c$  per la campana fissa esterna e  $-c_1$  per la campana fissa interna, si ha colle solite notazioni

$$(9) \quad \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{C}{c_2} \left[ 1 + \frac{3}{2R_2} c_2 + \left( \frac{1}{4R_2^2} - \frac{q^2}{3} \right) \times \right. \\ \left. \times c_2^2 - \frac{1}{8R_2^3} c_2^3 + \left( \frac{1}{16R_2^4} + \frac{q^2}{30R_2^2} - \frac{q^4}{10} \right) c_2^4 + \dots \right] e^{-m^2 t}$$

e l'analogia per  $\left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_{r=R_1}$ . La  $g$  è definita dall'equazione (Meyer)

$$M \frac{d^2 g}{dt^2} = -\tau g + 2\pi\eta \left[ R_2^3 \int_0^{d_2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} dh - R_1^3 \int_0^{d_1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R_1} dh \right] + \\ + 2\pi\eta \left[ \int_0^{R_2} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial h} \right)_{h=0} r^2 dr - \int_0^{R_1} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial h} \right)_{h=0} r^3 dr \right]$$

dove  $d_1$  e  $d_2$  sono le altezze delle pareti cilindriche (l'interna a l'esterna) della campana mobile,  $M$  il momento d'inerzia e  $\tau$  la torsione del sistema.

Per mezzo delle (3) (4) (9) e (10) si ha tenendo conto dei termini di terzo grado in  $c_1$  e  $c_2$

$$Mm^2 + \frac{\tau}{m^2} + 2\pi\eta \left\{ -R_2^3 d_2 \left[ \frac{1}{c_2} + \frac{3}{2R_2} + \left( \frac{1}{4R_2^2} - \frac{q^2}{3} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times c_2 - \frac{1}{8R_2^3} c_2^2 + \left( \frac{1}{16R_2^4} + \frac{q^2}{30R_2^2} - \frac{q^4}{45} \right) c_2^3 + \dots \right] + \right. \\ \left. + R_1 d_1 \left[ -\frac{1}{c_1} + \frac{3}{2R_1} - \left( \frac{1}{4R_1^2} - \frac{q^2}{3} \right) c_1 - \frac{1}{8R_1^3} c_1^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{1}{16R_1^4} + \frac{q^2}{30R_1^2} - \frac{q^2}{45} \right) c_1^3 + \dots \right] \right\} - \\ - 2\pi\eta \left\{ \frac{R_2^4}{4} \left[ \frac{1}{c_2} - \frac{q^2 c_2}{3} - \frac{q^4 c_2}{45} - \dots \right] + \frac{R_1^4}{4} \left[ \frac{1}{c_1} - \frac{q^2 c_1}{3} - \frac{q^4 c_1}{45} - \dots \right] \right\}$$

rammentando le relazioni:

$$m^2 = \frac{\varepsilon + i\pi}{T} \quad q^2 = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\varepsilon + i\pi}{T} \quad q^4 = \frac{\varrho^2}{\eta^2} \frac{\varepsilon - \pi^2 + i2\varepsilon\pi}{T^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} M \frac{\varepsilon + i\pi}{T} + \tau T \frac{\varepsilon - i\pi}{\varepsilon^2 + \pi^2} + \\ + 2\pi\eta \left\{ -\frac{R_2^3 d_2}{c_2} - \frac{R_1^3 d_1}{c_1} - \frac{R_2^4}{4c_2} - \frac{R_1^4}{4c_1} - \frac{3}{2} R_2^2 d_2 + \frac{3}{2} R_1^2 d_1 \right\} + \\ + 2\pi\eta \left\{ -\frac{R_2 d_2 c_2}{4} - \frac{R_1 d_1 c_1}{4} + \frac{d_2 c_2^2 - d_1 c_1^2}{8} \right\} + 2\pi\eta \left\{ -\frac{d_2 c_2^2}{16R_2} - \frac{d_1 c_1^2}{16R_1} \right\} + \\ + 2\pi\varrho \frac{\varepsilon + i\pi}{T} \left\{ \frac{R_2^3 d_2 c_2 + R_1^3 d_1 c_1}{3} + \frac{R_2^4 c_2 + R_1^4 c_1}{12} \right\} + \\ + 2\pi\eta \left\{ \frac{\varrho}{\eta} \cdot \frac{\varepsilon + i\pi}{T} \cdot \frac{-R_2 d_2 - R_1 d_1}{30} + \frac{\varrho_2 \varepsilon^2 - \pi^2 + 2i\varepsilon\pi}{\eta_2} \frac{2i\varepsilon\pi}{45} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{c_2^2 R_2 d_2 + c_1^2 R_1 d_1}{45} + \frac{c_2^2 R_2^4 + c_1^2 R_1^4}{4 \cdot 45} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Separando le parti reali dalle immaginarie si ottengono due equazioni, una delle quali sta a rappresentare l'influenza dell'attrito sul coefficiente di smorzamento  $\frac{\varepsilon}{T}$  delle oscillazioni della campana; l'altra, che noi non adoperemo, potrebbe servire a determinare l'influenza dell'attrito sul periodo di oscillazione. Fermandoci ai termini di secondo grado in  $c$  si ottiene

$$\begin{aligned} \left[ M + \pi\varrho \left\{ \frac{R_2^3 d_2 c_2 + R_1 d_1 c_1}{3} + R_2^4 c_2 - R_1^4 c_1 \right\} \right] \frac{\varepsilon}{T} = \\ = \pi\eta \left\{ \frac{R_2^3 d_2}{c_2} + \frac{R_1^3 d_1}{c_1} + \frac{R_2^4}{4c_2} + \frac{R_1^4}{4c_1} + \frac{3}{2} R_2^2 d_2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} R_1^2 d_1 + \frac{R_2 d_2 c_2 + R_1 d_1 c_1}{4} + \frac{d_2 c_2^2 - d_1 c_1^2}{8} \right\} \end{aligned}$$

Questa approssimazione è più che sufficiente per le applicazioni pratiche; anzi operando con dei gas in cui  $\varrho$  è piccolissimo, si può supporre il primo membro addirittura uguale a  $M$  con un errore, che nel mio caso, era minore dell'un per mille per una campana oscillante di alluminio e con maggiore approssimazione se la campana è di metallo più pesante. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} M \frac{\varepsilon}{T} = \pi\eta \left\{ \frac{R_2^3 d_2}{c_2} + \frac{R_1^3 d_1}{c_1} + \frac{R_2^4}{4c_2} + \frac{R_1^4}{4c_1} + \frac{3}{2} R_2^2 d_2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} R_1^2 d_1 + \frac{R_2 d_2 c_2 + R_1 d_1 c_1}{4} + \frac{d_2 c_2^2 - d_1 c_1^2}{8} \right\} \end{aligned}$$

Il metodo come si è detto viene applicato facendo l'esperienza con due campane di diversa altezza ma di ugual momento di inerzia e di identica sezione orizzontale. Indicando col  $l$  la differenza fra le altezze delle campane e con  $\epsilon'$  il decremento corrispondente alla seconda, si ha

$$M \frac{s - \epsilon'}{T} = \pi \eta l \left\{ \frac{R_2^3}{c_2} + \frac{R_1^3}{c_1} + \frac{3}{2} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_2 c_2 + R_1 c_1}{4} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{8} \right\}$$

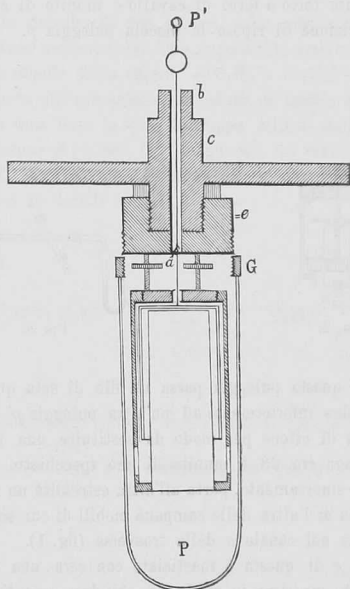


Fig. 1.

L'apparecchio fu costruito in modo da garantire la massima stabilità necessaria sopra tutto in tal genere di misure, ove anche un leggero tremolio impresso alla parte oscillante produrrebbe una non lieve perturbazione nel movimento. Sovra una pesante base di ferro gettato, provvoluta di viti calanti, si elevano due robusti cosciali di ghisa sorreggendo una traversina metallica rappresentata in sezione nella fig. 1.

A questa trasversa è avvitata una guarnizione di ebanite e affine di isolare termicamente la parte inferiore e più essenziale dell'apparecchio.



All'ebanite mediante tre viti di registro, è raccomandato il fondo della campana esterna immobile e al bordo inferiore di questa, si avvita la campana interna fissa essa pure. Mediante una ghiera di ottone *G* provvista di impanatura al tappo di ebanite si avvita in modo da chiudere ermeticamente la provetta *P*.

Al raccordo *b* si innesta una canna metallica che alla sommità reca un dispositivo semplicissimo come dimostra la fig. 2, col quale a mezzo di un magnete permanente torto a ferro di cavallo e munito di contrappeso si può spostare dalla posizione di riposo la piccola puleggia *p*.

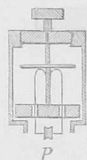


FIG. 2.

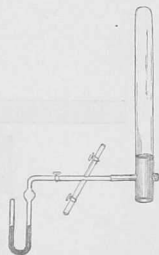


FIG. 3.

Nella gola di questa puleggia passa un filo di seta quasi privo di torsione e che si avvolge inferiormente ad un'altra puleggia *p'* situata all'estremità di un'asticina di ottone per modo da costituire una sospensione bifilare. L'asticina lunga cm. 23 è munita di uno specchietto per poter far le letture relative allo smorzamento, porta all'altra estremità un raccordo al quale si avvitano or l'una or l'altra delle campane mobili di cui sopra si è parlato e passa liberamente nel canale *a* della trasversa (fig. 1).

Sul ringrosso *c* di questa è masticiato con cera una canna di vetro, chiusa all'estremità superiore in modo da chiudere ermeticamente l'apparecchio.

Alla ghiera di ottone di cui è munita la canna, va unita come mostra la fig. 3 una croce di tubo di vetro; e mediante tre rubinetti si può far comunicare l'interno dell'apparecchio, sia con una macchina pneumatica, sia col manometro *m*, sia attraverso una batteria di purificatori e disseccatori col serbatoio contenente il gas da cimentare. La provetta *p* è immersa in un bagno tenuto agitato per rendere uniforme la temperatura. Il bagno è a sua volta contenuto in un recipiente di vetro a doppia parete nel quale si versa il refrigerante.