ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

campagna; e possiamo prendere come durata di oscillazioni a Martorana le medie fra le oscillazioni ottenute prima e dopo il viaggio: cosicchè abbiamo il

Riepilogo definitivo delle durate di oscillazioni a Martorana.

116	117	118	119
0,5062923 s	0,5070051 s	0,5072127 s	0,5071846 s

Matematica. — *Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche.* Nota di ALESSANDRO FERRARI, presentata dal Socio C. SEGRE.

1. Consideriamo un ramo illimitato di curva piana algebrica, per il quale ammettiamo, come possibili, tutte le singolarità di un ramo nel senso di Staudt (1).

Si consideri su questo ramo un punto generico P, poi la normale in P al ramo stesso e su di essa, a partire da P, si porti, in un certo senso, un segmento PM. Supponiamo finalmente che il punto P si muova sul ramo con continuità e sempre nello stesso senso, insieme col segmento PM, il quale conservi una lunghezza assegnata.

E, poichè conviene precisare, ecco, con ciò, cosa si vuol dire: Supponiamo che P, muovendosi sul ramo, come si è detto, venga in una posizione molto prossima a P. Allora, come nuova posizione di PM, prendiamo quella che si deduce con continuità dalla posizione precedente.

In pari tempo, fissato un punto O nel piano della curva, per ogni singola posizione assunta dal segmento PM, spicchiamo da O il segmento equipollente ON: è chiaro che, mentre P si muove sul ramo considerato, come si è detto, N si muoverà sulla circonferenza di centro O e raggio ON, a partire da una certa posizione iniziale, che diciamo A. Anzi, si vede che, pei punti al finito della curva fondamentale, la convenzione della continuità, per fissare sempre il verso della normale, pone una corrispondenza continua fra questa e la circonferenza. Nel passaggio per i punti all'infinito la continuità, nella corrispondenza colla circonferenza, sarà ancora conservata.

Quando il punto mobile P, che percorre il ramo, sarà ritornato in P insieme col segmento PM, possono presentarsi due casi: o il segmento PM ritorna nella precisa posizione iniziale, oppure viene nella posizione opposta, che dirò PQ.

(1) Cfr. Staudt, *Die Geometrie der Lage*, ai §§ 11, 12 e 15. In tutto il seguito il concetto di *contatto* e di *retta tangente* è precisamente quello di Standt.

Agevolmente si possono trovare esempî dell'uno e dell'altro fatto. Così, se si tratta di una circonferenza, ha luogo il primo fatto; mentre, se si tratta di una cardioide, ha luogo il secondo.

Ebbene: noi ci proponiamo di trovare, al riguardo, una proposizione generale.

Per facilitare la ricerca, consideriamo il moto del punto N su quella tale circonferenza di centro O. Il punto N, su tale circonferenza, si muove con continuità, a partire dalla posizione iniziale A, e si vede che il moto di esso punto terminerà in A, oppure nel punto diametralmente opposto B, secondochè ha luogo il primo od il secondo dei due fatti enunciati poc'anzi; cioè, secondochè la normale PM, quando P ha descritto tutto il ramo, ritorna nella posizione iniziale, o viene nella posizione opposta PQ.

Allora la quistione, che vogliamo risolvere, si può presentare così: Studiare il moto del punto N, che è noto dover terminare in A o in B; vedere quand' esso termina in A e quando in B e, finalmente, tradurre sul ramo, che si considera, la condizione che si sarà trovata.

È questa la via che abbiamo seguita.

Consideriamo un diametro *generico* XY e contiamo il numero delle volte, in cui il punto mobile N incontra tale diametro.

Io dico che: *Il moto del punto* N *terminerà in* A *ovvero in* B, *secondochè il numero di questi incontri è pari o dispari.*

Osserviamo, infatti, che, avendo preso il diametro XY perfettamente generico, i punti in cui N incontra XY sono altrettanti punti in cui N *attraversa* XY. Ora il diametro XY spezza la circonferenza, considerata in due semicirconferenze, in una delle quali sta il punto A e nell'altra il punto B. Se si pensa al punto mobile N che parte da A e si muove sulla circonferenza, un primo passaggio attraverso al diametro XY fa venire questo punto nella semicirconferenza in cui si trova B; un secondo passaggio lo fa tornare nella semicirconferenza in cui sta A; un terzo lo fa tornare nella semicirconferenza in cui sta B, ecc.... Si vede cioè, contando questi attraversamenti, che quelli di ordine dispari corrispondono a passaggi del punto mobile nella semicirconferenza in cui sta B, mentre quelli di ordine pari corrispondono ad altrettanti ritorni del punto mobile nella semicirconferenza in cui sta A. E poichè il moto del punto mobile deve terminare o in A o in B, segue subito quello che si voleva dimostrare; cioè: se quegli attraversamenti sono in numero pari si finirà in A, altrimenti in B.

Adesso risaliamo al ramo di curva fondamentale e vediamo che cosa significa per esso la condizione prima trovata.

Dal modo stesso con cui si è definito il moto del punto N su quella tale circonferenza e dall'aver scelto il diametro XY in modo del tutto generico, segue che ogni passaggio del punto N per X o per Y corrisponde ad un punto proprio del ramo in cui la normale ha la direzione XY e, quindi, ad un punto del ramo in cui la tangente ha la direzione ben determinata della perpendicolare ad XY; onde alla quistione che ci siamo proposti, possiamo rispondere così:

Quando il punto P, *muovendosi sempre nello stesso senso sul ramo di curva fondamentale, sarà ritornato nella posizione iniziale, il segmento di normale PM avrà ripresa la sua posizione iniziale, oppure prenderà la posizione opposta, secondochè è pari o dispari il numero delle tangenti al ramo considerato (in punti proprî), le quali passano per un punto generico all'infinito.*

Il ramo considerato può essere di classe pari o di classe impari. Se si esclude che esso abbia contatti colla retta all'infinito, il risultato ottenuto si può enunciare in questo modo:

Quando il punto mobile sul ramo ritornerà in P, *posizione iniziale, la normale riprenderà la sua posizione oppure rimarrà invertita, secondochè la classe del ramo è pari o impari.*

Se però non si vuole scapito di generalità, bisogna tener conto dei contatti colla retta all' infinito, ed allora il teorema enunciato prima si può completare dicendo:

Nelle ipotesi che noi abbiamo fatte, quando il punto P *ritorna nella posizione iniziale insieme colla normale* PM, *questa è invertita in questi due casi:*

c) ramo di classe pari con un numero impari di contatti colla retta all'infinito;

b) ramo di classe impari con un numero pari (zero incluso) di contatti colla retta all'infinito;

La normale PM, *invece, non rimane invertita in questi due casi:*

c) ramo di classe pari con un numero pari (zero incluso) di contatti colla retta all'infinito;

d) ramo di classe impari con un numero impari di contatti colla retta all'infinito.

2. La quistione risolta è intimamente legata a quella dello spezzamento delle linee parallele ad un ramo di curva piana algebrica, ed anzi ricordiamo come si può ottenere una di tali linee: Si fissa un segmento arbitrario, poi, in ogni punto di quel ramo, si considera la normale e su questa, da una parte e dall'altra del punto stesso, si porta quel certo segmento.

Il luogo di tutti i punti così ottenuti è ciò che dicesi « una linea parallela » a quel ramo, e quel certo segmento, che si è fissato da principio, si potrà chiamare « distanza di parallelismo » fra le due linee.

Consideriamo ancora il punto P insieme col segmento di normale PM e, come si è spiegato prima, facciamo percorrere a P tutto il ramo. Allora il punto M descriverà un tratto di una linea parallela a quel ramo.

Se quel ramo è tale che PM ritorni nella sua posizione iniziale, quando P l'ha percorso tutto, la linea parallela ad esso consterà di due rami: uno è quello che viene descritto dal punto M, l'altro è quello che si avrebbe, considerando, sulla normale al ramo in P, il segmento PQ, uguale ed opposto a PM, e poi, facendo descrivere da P, insieme col segmento PQ, tutto il ramo.

A moto terminato PQ tornerà anch'esso nella sua posizione iniziale, e il punto Q avrà, quindi, descritto tutto un secondo ramo della linea parallela.

Supponiamo, invece, che il ramo sia tale che, quando P l'ha percorso tutto, si ottenga l'inversione del segmento di normale PM; cioè, PM venga a fermarsi nella posizione opposta PQ. Allora il punto M ha descritto un arco di linea parallela che comincia in M e termina in Q. Se facciamo ora che P, sempre nello stesso senso, percorra il ramo una seconda volta, a moto finito, otterremo nuovamente l'inversione della normale e quindi il segmento PM, che prima s' era fermato in PQ, ritorna nella posizione iniziale PM. Contemporanemente il punto M descrive un secondo arco della linea parallela che comincia in Q e termina in M, ed è chiaro che quest'arco, insieme coll'arco precedente, forma un ramo solo della linea parallela.

Lo spezzamento della linea parallela in due rami succede, quindi, solo quando, facendo percorrere a P tutto il ramo insieme col segmento di normale PM, questo non s' inverte, quando P ritorna nella sua posizione iniziale.

Usando allora del risultato ottenuto precedentemente, diremo:

Si abbia un ramo illimitato di una curva piana algebrica, dotato di singolarità qualunque. Allora lo spezzamento delle linee parallele ad esso in due rami succederà solo quando è pari il numero delle tangenti al ramo in punti propri, le quali passano per un punto generico all'infinito.

Tenendo conto del numero dei contatti colla retta all'infinito, potremo dire che lo spezzamento delle linee parallele al ramo di curva fondamentale succede certo in questi due casi:

α) ramo di classe pari con un numero pari (zero incluso) di contatti colla retta all'infinito;

β) ramo di classe impari con un numero impari di contatti colla retta all'infinito.

Le linee parallele, invece, consteranno certo di un sol ramo in questi altri due casi:

γ) ramo di classe pari con un numero impari di contatti colla retta all'infinito;

δ) ramo di classe impari con un numero pari (zero incluso) di contatti colla retta all'infinito.

Si possono trovare facilmente alcuni esempi.

Si consideri una linea retta. Si ha così un primo esempio di ramo di classe pari senza contatti colla retta all'infinito.

Le linee parallele si dovranno spezzare in due rami, ed è ben noto che ciascuna si spezza in una coppia di rette.

Si consideri una circonferenza. Si ha così un secondo esempio di ramo di classe pari senza contatti colla retta all'infinito.

Le linee parallele dovranno spezzarsi, e noi sappiamo benissimo che ciascuna di esse si spezza in una coppia di circonferenze.

Più in generale lo spezzamento delle linee parallele in due rami succede per le coniche a centro; ma se si considera invece la parabola, le linee ad essa parallele consteranno di un ramo solo. Si avrà allora, infatti, un ramo di classe pari con un numero impari (uno) di contatti colla retta all'infinito.

Veniamo a curve del terzo ordine con punto doppio. Se questo punto doppio è una cuspide, la curva ha un ramo solo di (ordine impari e) classe impari. Allora, se la curva non è tangente alla retta all'infinito, le linee parallele consteranno di un ramo solo, mentre se la cubica fosse tangente alla retta all'infinito, le parallele avrebbero due rami.

Se il punto doppio è, invece, un ordinario nodo, la cubica ha un ramo solo di (ordine impari e) classe pari. Allora le linee parallele consteranno di due rami, oppure di un ramo solo, secondo che la cubica non è o è tangente alla retta all'infinito.

3. Osserviamo ora che si possano trovare curve piane algebriche di ordine n delle quali un ramo sia tagliato da certe rette del piano in n punti, o anche solo in più di $\frac{n}{2}$ punti, se n è pari, o in più di $\frac{n-1}{2}$ punti, se n è impari.

Allora, se si considerano delle linee parallele a questo ramo e si prende la distanza di parallelismo sufficientemente piccola, si potrà fare in modo che queste linee parallele siano tagliate da queste medesime rette in $2n$ punti o, almeno, in più di n punti, perchè è chiaro che su ciascuna di tali rette avremo, per ogni punto di sua intersezione colla curva fondamentale, due punti di intersezione colla curva parallela, situati da bande opposte di quello. Se succedesse allora che queste linee parallele fossero formate di un ramo solo, si potrebbe certamente affermare che o le curve parallele non si spezzano, o che, se si spezzano, certamente una delle parti è di ordine maggiore di n.

Ci serviremo di questa osservazione per discutere una congettura di Cayley precisamente sulle curve parallele ad una curva piana algebrica data.

Cayley afferma [1] che, quando è data una curva piana algebrica che veri-

[1] Cfr. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. XI (1871). La Memoria di Cayley è intitolata: *On evolutes and parallel Curves.* Per la medesima Me-

fichi certe condizioni relativamente ai punti ciclici, le curve ad essa parallele si spezzano in due curve *tali che la curva data.*

Uno dei casi in cui, secondo Cayley, ha certo luogo questo spezzamento è il seguente.

Si consideri una curva piana algebrica avente nei punti ciclici del piano I, J singolarità qualunque, e indichiamo, se n è la classe di questa curva, con $n - \mathrm{I}$ e con $n - \mathrm{J}$ il numero delle tangenti condotte da I e J rispettivamente alla curva, escludendo la retta IJ e le tangenti alla curva in I o in J. Sono queste quelle che Cayley chiama *tangenti focali* della curva.

Ebbene: egli osserva che quando $n - \mathrm{I} = n - \mathrm{J} = o$, la curva parallela alla curva data ha ordine, classe, numero delle cuspidi e numero dei flessi doppi di quelli della curva data; per cui dice: « ciò porta all'assunto che la curva parallela si spezza in due curve tali che la curva data ». Anzi, usando della sua denominazione di tangenti focali, enuncia il precedente risultato dicendo:

« La condizione affinchè la curva parallela ad una una curva data si spezzi, è che la curva data non abbia tangenti focali ».

Orbene, applicando i risultati che abbiamo ottenuti, possiamo citare qualche esempio che contraddice l'ipotesi del Cayely. Il primo esempio lo ricavo dalla cardioide.

Come è noto la cardioide è una quartica piana dotata di tre cuspidi, una al finito e due all'infinito, e precisamente nei punti ciclici. La classe di questa curva è 3 e, se si considerano le tangenti che ad essa si ponno ulteriormente condurre dai punti ciclici, si vede che essa si trova nelle condizioni dell'ultimo enunciato di Cayley.

Ora, se noi prendiamo i punti reali della cardioide, essi costituiscono un unico ramo di classe dispari senza contatti colla retta all'infinito; per cui (applicando il teorema da noi precedentemente stabilito) è certo che le linee parallele a questo ramo consteranno di un ramo solo. Ora io posso tracciare rette che taglino quel ramo di cardioide in quattro punti e quindi, se la distanza di parallelismo è sufficientemente piccola, il ramo della parallela in otto punti. Ma allora come potrebbe questo unico ramo far parte di una curva del quarto ordine?

La parallela, che è di ottavo ordine, non potrà spezzarsi.

Un secondo esempio.

Consideriamo l'ipocicloide a tre cuspidi. È una curva del quarto ordine, di classe tre che è bitangente alla retta all'infinito nei punti ciclici. Anche essa è nelle condizioni dell'ultimo enunciato di Cayley.

---

moria si può vedere il volume VIII delle Collected Mathematical Papers of A. Cayley, pagg. 42 e 43. Cfr. anche G. Loria, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven,* nel capitolo: « Die Parallelkurven », a pag. 644.

I punti reali costituiscono un ramo unico di classe dispari senza contatti colla retta all'infinito; per cui, quindi, le linee parallele constano di un solo ramo. Ma ci sono rette che tagliano quel ramo dell'ipocicloide in quattro punti; quindi il ramo parallelo in otto punti, sempre, ben inteso, per distanze di parallelismo sufficientemente piccole, onde, come nell'esempio precedente, noi concluderemo che la parallela all'ipocicloide è una curva di ottavo ordine che non si spezza.

Ed ora la conclusione che si può trarre dai ragionamenti precedenti mi pare debba essere la seguente:

Nelle condizioni contemplate da Cayley, in generale, la linea parallela ad una curva piana algebrica non si spezza e, se pure in certi casi dovesse spezzarsi, non è nemmen detto che si debba spezzare in due curve dello stesso ordine della curva data.

Fisica. — *Le emanazioni del radio aumentano la conduttività dell'acqua* (1). Nota del dott. Ugo Grassi, presentata dal Socio A. Roiti.

L'aumento di conducibilità che acquistano i liquidi sottoposti alle radiazioni più penetranti emesse dalle sostanze radioattive fu studiato dalla Curie (2) con l'elettrometro e da Rubens e Kohlrausch (3) con il metodo del ponte. Questi ultimi trovarono che un'acqua di conducibilità iniziale $1{,}1.10^{-6}\,\Omega^{-1}$ assume un potere conduttore crescente con il tempo in maniera più rapida quando è sottoposta alle radiazioni di quando non lo è; e precisamente l'aumento, non costante, è dell'ordine di grandezza di $0{,}025.10^{-6}$ in due giorni di esposizione alle radiazioni e di $0{,}0050.10^{-6}$ nel caso contrario. Questo interessante risultato si può spiegare ammettendo che i raggi emessi dal radio modifichino gli strati del liquido immediatamente colpiti e che poi, per movimenti convettivi facili ad immaginarsi, tale modificazione si diffonda nella massa del liquido stesso. Le emanazioni delle sostanze radioattive devono avere pure un notevole potere ionizzante, ed anche tenuto conto della loro minima solubilità nell'acqua, è presumibile che l'acqua cambi in qualche modo di conduttività facendovi gorgogliare un gas carico di tali emanazioni.

Feci a tal proposito alcune ricerche servendomi di un apparecchio in vetro di Jena della forma qui rappresentata (v. figura). L'apparecchio portava due elettrodi E di platino terso, ed era immerso in un bagno ad olio di vase-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Thèse, 1904.

(3) Verh. d. D. Phys. Ges. (5), n. 15, 1903.