ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

la seconda, corre fra Trapani e Taormina, all'incirca; la 4ª è quella di Palermo, che va a perdersi nei dintorni dell'Etna verso Milo e Nicolosi; la 5ª, sempre più interna, da Termini accenna a Randazzo; la 6ª tende a legare, entro alla 5ª, Corleone con Paternò. Infine restano i tre punti centralissimi dell'Isola, Vicaretto, Castrogiovanni e Caltanissetta, dei quali i primi due possono lasciarci sbozzare una settima curva interna che passa frammezzo ad essi: Caltanissetta resta isolata, col minimo valore d'anomalìa sinora determinato in Sicilia. Si ha dunque un vero gradiente gravimetrico col centro (minimo) a Caltanissetta, e che avvolge tutta la parte centrale e settentrionale dell'Isola, stendendosi sino ad Ustica e a Lipari, estreme stazioni possibili rispetto alla Sicilia verso Nord, a non contare Stromboli che pare faccia sistema col continente. Sarà interessante vedere come si comporta questo gradiente verso Sud; ma in attesa di ciò, mi piace conchiudere osservando che attorno all'Etna, e col minimo alla vetta, esiste un altro gradiente locale caratteristico del gran Vulcano, che ha una curiosa analogia col gradiente generale di cui sopra ho sbozzato l'andamento. Dall'Osservatorio Etneo a quello di Catania, abbiamo la stessa anomalia relativa [1], che tra Caltanissetta e Palermo, con distanza cinque volte maggiore, ma con un dislivello cinque volte minore all'incirca. Questa circostanza dipende da cause fortuite, o è l'esponente di qualche correlazione fra la distribuzione delle másse sotto il vulcano, e quella relativa all'intera Isola?... Ai nuovi studi il chiarire, se pur sia possibile, simili interessanti risultati.

Matematica. — *Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio L. Bianchi.

1. Continuo lo studio iniziato nella Nota pubblicata con lo stesso titolo in questi Rendiconti (18 giugno 1905). Generalizzerò la ricerca alle varietà a più di tre dimensioni, limitandomi qui al caso più simmetrico e interessante delle varietà V (di Levi-Civita), il cui elemento lineare è del tipo:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} [\Pi_j'(\psi_i - \psi_j)]\, dx_i^2 \tag{1}$$

dove le x_i sono le coordinate correnti, ψ_i è funzione delle x_i (eventualmente costante), Π_j' indica che j percorre tutti i valori, eccetto $j = i$. Tutte le ψ sono distinte, perchè si suppone (1) non degenere. Indicheremo, come nella prima Nota, con y_i un nuovo sistema di variabili, tali che l'elemento (1),

[1] V. Riccò, *Determinazione di gravità relative in 43 luoghi*, ecc. Spettroscopisti, vol. XXXII.

espresso per mezzo di esse, è ancora dello stesso tipo $\sum_{i=1}^{n}[\Pi'_j(\varphi_i-\varphi_j)]dy_i^2$, dove φ_i è funzione della sola y_i. Con I indico l'Iacobiano delle x rispetto alle y; con $\binom{i}{j}$, $\binom{ij}{lm}$, $\binom{ijl}{mqp}$ ecc. indico i suoi minori $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, $\frac{\partial(x_i\, x_j)}{\partial(y_l y_m)}$, $\frac{\partial(x_i\, x_j\, x_l)}{\partial(y_m\, y_q\, y_p)}$ ecc. Con C^{ij}_{lm} indico il complemento algebrico in I di $\binom{ij}{lm}$. Indicando con $(il\,, mp)$, $(il\,, mp)_y$ i simboli di Riemann di prima specie relativi ai due elementi lineari, si ha che essi sono tutti nulli, eccetto quelli del tipo $(il\,, il) = -(li\,, il)$, $(i \neq l)$, $(il\,, il)_y = -(li\,, il)_y$, e che quindi:

$$(il\,, pq)_y = \sum_{rs}(rs\,, rs)\binom{rs}{il}\binom{rs}{pq}. \tag{2}$$

Con $[ij]$ indicherò la curvatura $\frac{(ij\,, ij)}{a_{ii}\, a_{jj}}$, $(i \neq j)$; con $[ijk]$ indicherò l'espressione: $\frac{[ij]-[ik]}{\psi_j-\psi_k}$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ e infine con $[ijhk]$ indico l'espressione: $\frac{[ijh]-[ijk]}{\psi_h-\psi_k}$, se gli indici i, j, h, k sono tutti distinti.

2. Lemma I. — *Hanno luogo le seguenti identità:*

$$\frac{[ij]}{(\psi_k-\psi_i)(\psi_k-\psi_j)}+\frac{[jk]}{(\psi_i-\psi_j)(\psi_i-\psi_k)}+\frac{[ki]}{(\psi_j-\psi_k)(\psi_j-\psi_i)}=0 \tag{3}$$

$$(\psi_i-\psi_j)[kij]+(\psi_j-\psi_l)[kjl]+(\psi_l-\psi_i)[kli]=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial[ij]}{\partial x_k}=\psi'_k[ijk] \tag{5}$$

$$\frac{\partial[ijk]}{\partial x_l}=\psi'_l[ijkl] \tag{6}$$

se gli indici i, j, k, l sono tutti distinti. Le espressioni $[ijk]$, $[ijkl]$ sono rispettivamente simmetriche negli indici i, j, k e i, j, k, l.

La (4) si verifica tosto, ricordando che $(\psi_i-\psi_j)[kij]=[ki]-[kj]$ ecc.

Le (3), (5), (6) si verificano col calcolo effettivo.

Dalle (3), (4) scende subito l'ultima parte del precedente teorema ([1]).

Lemma II. — *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'elemento* (1) *sia a curvatura costante, è che tutti i simboli* $[ijk]$ *siano nulli.*

Infatti, se lo spazio è a curvatura costante in ogni singolo punto, è sempre $[ij] = [ik]$, ossia $[ijk] = 0$. Viceversa, se tutti i simboli $[ijk]$ sono nulli, lo spazio è a curvatura costante in ogni singolo punto. E questa curvatura è poi una costante effettiva (come risulta in generale da un teorema di Schur) o come si deduce dalle (5), che ne dimostrano identicamente nulle le derivate prime.

3. Ora (Nota 1ª, § 3) noi possiamo senz'altro trascurare il caso di varietà a curvatura costante, ossia (lemma II) potremo ammettere che almeno uno dei simboli $[ijk]$ sia diverso da zero. Vale in tal caso il seguente

Teorema fondamentale. *Se* (1) *non è a curvatura costante, esiste almeno un indice* l, *tale che tutti i simboli* $[ijk]$, *per cui uno degli indici* i, j, k *è uguale a* l, *sono senza eccezione diversi da zero.*

Infatti, se tutti i simboli $[ijk]$ sono differenti da zero, allora ognuno degli indici $1, 2, \ldots, n$ si può assumere come indice l. Sia invece p. es. $[123] = 0$; indicheremo con $1, 2, 3, \ldots, t$ tutti gli indici tali che $[ijk] = 0$ per $i \leq t, k \leq t, j \leq t$. Poichè non tutti i simboli $[pqr]$ sono nulli, sarà $t < n$; ma certamente è $t \geq 3$.

([1]) Si trova che

$$[12] = \Big\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{\psi_1 - \psi_2} \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{\psi_1 - \psi_2} \frac{1}{a_{11}} \Big[\frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \sum_l{}' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \Big] \Big\}_{rot(1,2)}$$
$$- \frac{1}{4} \sum_3^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}} \frac{1}{(\psi_i - \psi_1)(\psi_i - \psi_2)}$$

$$[123] = \Big\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{a_{11}(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{a_{11}} \frac{1}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} \times$$
$$\times \Big[\frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_3} + \sum_l{}' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \Big] \Big\}_{rot(1,2,3)}$$
$$- \frac{1}{4} \sum_4^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}} \frac{1}{(\psi_i - \psi_1)(\psi_i - \psi_2)(\psi_i - \psi_3)}$$

$$[1234] = \Big\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{a_{11}(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{a_{11}} \frac{1}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \times$$
$$\times \Big[\frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_3} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_4} + \sum_l{}' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \Big] \Big\}_{rot(1,2,3,4)}$$
$$- \frac{1}{4} \sum_5^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}(\psi_i - \psi_2)(\psi_i - \psi_3)(\psi_i - \psi_4)(\psi_i - \psi_1)} \quad \text{e analoghe}$$

dove $\sum' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l}$ indica che l percorre tutti i valori $(1, 2, \ldots n)$ eccetto il valore $l = 1$, e dove $\}\cdots\{_{rot(1,\ldots)}$ indica la somma dell'espressione tra $\}\{$ e delle analoghe, che si ottengono, rotando gli indici $1, \ldots$

In primo luogo io dico che ψ_h (per $h > t$) è costante; basterà dimostrare che, se $\psi_h \neq$ cost, allora $[ijh] = 0$ (per $i \leq t, j \leq t, i \neq j$). Infatti sia $k \leq t, k \neq i, k \neq j$. Sarà $[kij] = 0$ e quindi $\frac{\partial [kij]}{\partial x_h} = \psi'_h [kijh] = 0$; e, poichè $\psi'_h \neq 0$, sarà $[kijh] = 0$, ossia $[kij] - [hij] = 0$; ma, poichè $[kij] = 0$, sarà pure $[hij] = 0$. Tutte le ψ, non uguali a una costante, hanno perciò un indice non maggiore di t; e noi le potremo quindi indicare con $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d$, dove $d \leq t$ (¹). Io dico ora che *tutti i simboli* $[pqr]$, *per cui anche uno solo degli indici* p, q, r *sia maggiore di* t, *sono differenti da zero*. Infatti sia $i \leq t, j \leq t, h > t$, $m \leq d$ $(i \neq j \neq m \neq i)$. Sarà, poichè $[mij] = 0$, per (6):

$$\frac{\partial [ijh]}{\partial x_m} = \psi'_m [hmji] = \frac{\psi'_m}{\psi_m - \psi_h} \{[ijm] - [ijh]\} = -\frac{\psi'_m}{\psi_m - \psi_h} [ijh].$$

Scrivendo questa uguaglianza per tutti i valori di m $(\leq d)$ distinti da i, j, otterremo, integrando e indicando con β_{hij} una funzione di x_i, x_j:

$$[ijh] = \frac{\beta_{hij}}{(\psi_h - \psi_1)(\psi_h - \psi_2) \ldots (\psi_h - \psi_d)} : (h > t, j \leq t, j \leq t).$$

Indicando con α_{hij} una nuova funzione di x_i, x_j, possiamo scrivere questa equazione nel modo seguente:

$$[ijh] = \frac{\alpha_{hij}}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)(\psi_h - \psi_j)}$$

e analoghe (²).

Sia ora $k \leq t, k \neq i, k \neq j$. Dalla (4) si trae che tra i simboli $[hij], [hjk], [ijk]$ esiste un' identità, che per le formule precedenti e per la $[ijk] = 0$, diventa: $\alpha_{hij} - \alpha_{hkj} = 0$. Da questa uguaglianza si deduce che tutte le α_{hij} sono uguali a una stessa quantità α_h dipendente solo dall' indice h. Poichè poi $\alpha_h = \alpha_{hij}$ si trova che α_h è indipendente da x_k e quindi, per simmetria, anche da x_i, x_j. Ma, poichè $\alpha_h = \alpha_{hij}$ è funzione soltanto di x_i, x_j, avremo che α_h è una costante.

Poichè poi non tutti i simboli $[hij]$ $(i \leq t, j \leq t, i \neq j)$ sono nulli, sarà certamente $\alpha_h = \text{cost} \neq 0$ e quindi *tutti i simboli* $[hij]$ $(i \leq t, i \leq t, i \neq j)$ *sono diversi da zero*. Ricordo ora che (se, c. s., $m \leq d, i \leq t, i \neq m, h > t$) per le (5):

$$\frac{\partial [ih]}{\partial x_m} = \psi'_m [him] = \frac{\alpha_h \psi'_m}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)(\psi_h - \psi_m)}.$$

(¹) Ricordo che esiste certamente qualche ψ non costante; altrimenti lo spazio sarebbe a curvatura costante (nulla): ciò, che abbiamo escluso.

(²) Ricordo che $[ijh]$ non dipende da x_s, se $\psi_s = $ cost: altrettanto avviene quindi di α_{hij} (anche se $s = i$, oppure $s = j$). In ogni caso è poi $\alpha_{hij} = \alpha_{hji}$, poichè $[hij] = [hji]$.

Scrivendo questa equazione per tutti i valori di m $(m \leq d\,; m \neq i)$ si trova, integrando:

$$[ih] = \frac{\alpha_h}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)} + \lambda_{ih}$$

dove λ_{ih} è funzione al massimo di x_i.

Valgono poi equazioni analoghe al variare di i $(i \leq t)$ e di $h (h > t)$. Ricordiamo ora che (se $j \leq t$ è $[ih] - [ji] = (\psi_h - \psi_j)[hij]$. Ricordando i valori di $[ih], [hij]$, si trova che $\lambda_{ih} = [ij]$ e quindi anche $\lambda_{jh} = [ij]$. Tutte le quantità $\lambda_{ih} (i \leq t)$ sono perciò uguali fra di loro; e poichè λ_{ih} e λ_{jh} (quantità uguali) non dipendono che da $x_i (x_j)$, tutte le λ_{ih} saranno uguali a una stessa costante λ_h. Così pure tutti i simboli $[ij]$ $(i \leq t, j \leq t, i \neq j)$ sono pure uguali a questa quantità λ_h, che è perciò indipendente dall'indice h, e che noi potremo senz'altro indicare con λ. In definitiva è dunque

$$[ij] = \lambda \; (\lambda = \text{cost}) \; (i \leq t\,, j \leq t)\,; [ih] = \frac{\alpha_h}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)} + \lambda \tag{7}$$
$$(\alpha_h = \text{cost} \neq 0)$$

Ora è facile vedere che *anche tutti i simboli* $[h\varkappa j]$ $(h > t\,, \varkappa > t, j \leq t)$ *sono differenti da zero*. Se p. e. fosse $[h\varkappa j] = 0$, sarebbe $[j\varkappa] = [jh]$, ossia per (7) $\alpha_h\, a_{\varkappa\varkappa}(\psi_\varkappa - \psi_j) = \alpha_\varkappa\, a_{hh}(\psi_h - \psi_j)$: ciò che è assurdo, perchè $\alpha_h \neq 0$, $\alpha_\varkappa \neq 0$ $(\alpha_h = \text{cost}\,, \alpha_\varkappa = \text{cost})$, $\psi_m (m \leq d)$ dipende solo da x_m, e almeno una delle ψ_m non è costante. Così pure anche *tutti i simboli* $[h\varkappa\chi]$ $(h > t\,, \varkappa > t\,, \chi > t)$ $(h \neq \varkappa \neq \chi \neq h)$ *sono differenti da zero*. Se p. es. fosse $[h\varkappa\chi] = 0$, sarebbe $[h\varkappa] = [h\chi]$. Ora dall'identità (cfr. la (3)) tra $[ih]$, $[i\varkappa]$, $[h\varkappa]$ $(i \leq t)$ si deduce $[h\varkappa]$ in funzione di $[hi]$, $[i\varkappa]$; e, per le (7), si trova:

$$[h\varkappa] = \frac{1}{\psi_\varkappa - \psi_h}\left[\frac{\alpha_\varkappa}{a_{\varkappa\varkappa}} - \frac{\alpha_h}{a_{hh}}\right].$$

Formula analoga vale per $[h\chi]$. Se dunque fosse $[h\varkappa] = [h\chi]$, sarebbe:

$$\frac{\alpha_h}{a_{hh}}(\psi_\chi - \psi_\varkappa) + \frac{a_\varkappa}{a_{kk}}(\psi_h - \psi_\chi) + \frac{a_\chi}{a_{\chi\chi}}(\psi_\varkappa - \psi_h) = 0$$

equazione assurda per le ragioni dette più sopra. In conclusione: *tutti i simboli* $[pqr]$, *per cui anche uno solo degli indici* $p\,, q\,, r$ *è maggiore di* t, *sono differenti da zero*. Basta dunque scegliere l in guisa che $n \leq l$, $l > t$, perchè sia dimostrato il nostro teorema iniziale.

4. Premesso questo, daremo una formula essenziale al nostro scopo. Per noti teoremi sui determinanti è identicamente (vedi § 1)

$$\sum_{i,k} \binom{ik}{\alpha\beta} C^{ik}_{rs} = 0 \;\; (\alpha\,, \beta, r\,, s = 1\,, 2\,, \ldots, n\,; \alpha < \beta\,; r < s\,; \alpha \neq r\,; \beta \neq s$$
$$\text{oppure } \alpha = r\,, \beta \neq s\,, \text{ oppure } \alpha \neq r\,, \beta = s).$$

Con gli stessi indici è pure (§ 1) nullo $(\alpha\beta\,,rs)_y$ e per la (2) sarà:

$$0=(\alpha\beta\,,rs)_y=\sum_{i,k}(ik\,,ik)\binom{ik}{\alpha\beta}\binom{ik}{rs}\,.$$

Confrontando con la precedente identità, otteniamo (poichè $\mathrm{I}\neq 0$):

$$(ik\,,ik)\binom{ik}{rs}=\varrho_{rs}\,\mathrm{C}^{ik}_{rs} \tag{8}$$

dove ϱ_{rs} è un fattore di proporzionalità, dipendente soltanto dagli indici r,s. Nè può essere $\varrho_{rs}=\infty$; chè altrimenti sarebbe $\mathrm{C}^{ik}_{rs}=0$ e quindi $\mathrm{I}=0$. Poichè nell'elemento trasformato, il coefficiente di $dy_m\,dy_p$ $(m\neq p)$ è nullo, avremo che:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n}a_{\varepsilon\varepsilon}\binom{\varepsilon}{i}\binom{\varepsilon}{k}=0\quad(k=r,\ \text{oppure}\ k=s\,;\ i\neq r\,,\,i\neq s)$$

$$(r\neq s\,;\ r\,,s=1\,,2\,,\ldots,n)\,.$$

Tenendo fisso k, facciamo variare i; otterremo così $n-2$ equazioni lineari tra le $a_{\varepsilon\varepsilon}\binom{\varepsilon}{k}$. Indichiamo con $p\,,q\,,\varrho$ tre indici distinti $(\leq n)$; ed eliminiamo tra queste equazioni tutte le $a_{\varepsilon\varepsilon}\binom{\varepsilon}{k}$, eccetto quelle corrispondenti a $\varepsilon=p\,,\varepsilon=q\,,\varepsilon=\varrho$. Otteniamo così:

$$[a_{pp}\,\mathrm{C}^{q\varrho}_{rs}]\binom{p}{k}+[a_{qq}\,\mathrm{C}^{\varrho p}_{rs}]\binom{q}{k}+[a_{\varrho\varrho}\,\mathrm{C}^{pq}_{rs}]\binom{\varrho}{k}=0$$

Queste due equazioni (una per $k=r$, e una per $k=s$) danno, risolute, rispetto alle quantità entro [ ] che:

$$a_{pp}\,\mathrm{C}^{q\varrho}_{rs}=\tau^{pq\varrho}_{rs}\binom{q\varrho}{rs}\quad\text{e analoghe} \tag{9}$$

oltre quelle che si ottengono rotando $p\,,q\,,\varrho$ e ricordando che $\tau^{pq\varrho}_{rs}=\tau^{q\varrho p}_{rs}=\tau^{\varrho pq}_{rs}$, dove queste τ sono dei fattori di proporzionalità. Se $\tau^{pq\varrho}_{rs}=\infty$, allora anche $\binom{q\varrho}{rs}=\binom{\varrho p}{rs}=\binom{pq}{rs}=0$; ma, per le (8), anche i primi membri di (9) sarebbero nulli; anche in questo caso $\tau^{pq\varrho}_{rs}$ si può dunque supporre finito. Confrontando (8), (9) otteniamo (posto $q=i$, $\varrho=k$)

$$[a_{pp}\,(ik\,,ik)-\varrho_{rs}\,\tau^{pik}_{rs}]\binom{ik}{rs}=0 \tag{10}$$

e le analoghe, che si ottengono rotando p,i,k e ricordando che $\tau^{pik}=\tau^{ikp}=$ $=\tau^{kpi}$. Se due delle $\binom{ik}{rs},\binom{kp}{rs},\binom{pi}{rs}$ sono diverse da zero, p. es. le prime due, allora è:

$$a_{pp}(ik\,,ik)=\varrho_{rs}\,\tau^{pik}_{rs}=a_{ii}(kp\,,kp)\ \text{ossia}\ [ik]=[kp]\ \text{ossia}\ [ikp]=0\,.$$

Riassumendo avremo così: *Se* $[pik] \neq 0$, *almeno due dei tre simboli* $\binom{pi}{rs}, \binom{ik}{rs}, \binom{kp}{rs}$ $(r \neq s)$ *sono differenti da zero* (comunque siano scelti gli indici distinti r, s).

5. Permutando gli indici delle x e delle y, potremo supporre che l'indice l del § 3 sia uguale a 1 e che (poichè $\mathrm{I} \neq 0$) $\binom{1}{1}, \binom{12}{12}, \binom{123}{123}, \ldots, \binom{12\ldots n-1}{12\ldots n-1}$ siano differenti da zero. Essendo $[123] \neq 0$, due almeno dei minori $\binom{12}{12}, \binom{23}{12}, \binom{31}{12}$ (cfr. § 4) sono nulli; e poichè $\binom{12}{12} \neq 0$, sarà $\binom{23}{12} = \binom{31}{12} = 0$. Queste sono due equazioni lineari in $\binom{3}{1}, \binom{3}{2}$, da cui discende $\left(\text{poichè } \binom{12}{12} \neq 0\right)$ $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 0$. Poichè $\binom{123}{123} \neq 0$, sarà dunque $\binom{3}{3} \neq 0$. Per la stessa ragione almeno uno dei minori $\binom{32}{23}, \binom{23}{13}, \binom{23}{21}$ è differente da zero; poichè $0 = \binom{3}{1} = \binom{3}{2}$, l'ultimo di essi è nullo; e quindi almeno uno dei minori $\binom{23}{23}, \binom{23}{13}$ è differente da zero. In ogni caso, permutando al più (com'è lecito) y_1, y_2 potremo supporre $\binom{23}{23} \neq 0$. E poichè $[123] \neq 0$, sarà (cfr. § 4) $\binom{12}{23} = \binom{13}{23} = 0$, da cui, come sopra, discende $\binom{1}{2} = \binom{1}{3} = 0$. Poichè $\binom{123}{123} \neq 0$, sarà $\binom{1}{1} \neq 0$, e quindi anche $\binom{13}{13} \neq 0$. Ma, poichè $[123] \neq 0$, sarà $\binom{12}{13} = \binom{23}{13} = 0$ e quindi $\binom{2}{1} = \binom{2}{3} = 0$. In conclusione soltanto i termini diagonali di $\binom{123}{123}$ sono diversi da zero. Poichè poi $\binom{12}{12} \neq 0$ e $[124] \neq 0$, sarà (cfr. § 4) $\binom{14}{12} = \binom{24}{12} = 0$ e quindi $\binom{4}{1} = \binom{4}{2} = 0$. Analogamente si prova che $\binom{4}{3} = 0$ e quindi, poichè $\binom{1234}{1234} \neq 0$, che $\binom{4}{4} \neq 0$. Sarà perciò $\binom{14}{14} \neq 0$; e quindi, poichè $[124] \neq 0$, sarà (cfr. § 4) $\binom{12}{14} = \binom{24}{14} = 0$, ossia $\binom{2}{1} = \binom{2}{4} = 0$. In modo analogo si prova che $\binom{1}{4} = \binom{3}{4} = 0$, ossia che anche in $\binom{1234}{1234}$ soltanto i termini diagonali sono differenti da zero. Così continuando, si dimostra che anche in I soltanto i termini diagonali

sono differenti da zero, ossia che x_i è funzione soltanto di y_i. Il che si puo enunciare così (appena si ricordi che noi abbiamo fatto delle permutazioni sugli indici delle x e delle y): *Se lo spazio* (1) *non è curvatura costante, una trasformazione che porti l'elemento* (1) *in un elemento dello stesso tipo, può, al più, permutare tra loro le ipersuperficie coordinate. Da cui si deduce che uno spazio* (1) *a curvatura non costante, non può ammettere più di un sistema coordinato x_i di Levi-Civita, appunto come per* $n=3$. Ciò che risolve una prima parte della nostra questione.

Gli spazî (1) si caratterizzano invariantivamente, come per $n=3$, osservando che le linee x_i sono linee principali, nel senso del prof. Ricci (Atti dell'Istituto Veneto, 1904). Se fosse vero, e si potesse dimostrare in modo semplice e diretto (ciò che non pare possibile senza lunghi calcoli) che le curvature principali sono tutte distinte, si sarebbe in nuovo modo dimostrato il presente teorema.

Fisica. — *Sui costituenti radioattivi dei sedimenti di Echaillon e Salins Moutiers.* Nota di G. A. Blanc presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota pubblicata nel numero di gennaio u. s. del « Philosophical Magazine » annunciavo di aver constatato come i sedimenti di alcune acque termali della Savoia, e precisamente di quelle di Echaillon presso Saint Jean de Maurienne e di Salins-Moutiers, avessero la proprietà di emettere un'emanazione radioattiva avente caratteri simili a quelli dell'emanazione del Torio, vale a dire la cui attività andava scemando col tempo, riducendosi di metà in circa un minuto primo, e che per di più presentava la proprietà di comunicare ai corpi coi quali veniva a contatto, e specialmente a quelli carichi di elettricità negativa, un'*attività indotta* la quale andava poi sparendo col tempo riducendosi di metà in circa undici ore. Inoltre era possibile mediante riscaldamento di estrarre da quei medesimi fanghi delle tracce di emanazione di tipo radio, vale a dire la cui attività andava riducendosi col tempo cadendo a metà in poco più di tre giorni e capace di provocare un'attività indotta riducentesi di metà in circa mezz'ora. Era ovvio quindi ammettere che quei sedimenti dovessero contenere, oltre alle tracce di radio che varî sperimentatori avevano constatate nei depositi di molte sorgenti, anche dei sali di torio; tuttavia era notevole il fatto che la quantità di emanazione che da essi si poteva ottenere sembrava richiedere la presenza di quantità abbastanza rilevanti di questo elemento, mentre sino allora non si era mai inteso a parlare di giacimenti toriferi in quelle regioni.

È noto che le quantità di emanazione che si possono estrarre da un dato peso di torio dipendono dal suo stato di combinazione; l'idrato, ad