

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVICCI

1905

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 1° ottobre 1905.

Matematica. — *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.*
Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. In una Nota precedente (1), dopo aver messo a confronto (§ 1) le condizioni essenzialmente diverse che si presentano nei due casi in cui in un cilindro cavo si faccia una distorsione dovuta ad un taglio radiale (distorsione d'ordine 6 (2)) oppure ad un taglio uniforme (distorsione d'ordine 1), ho approfondito il primo caso ed ho mostrato che il corpo, dopo la distorsione, non conserva la forma cilindrica, giacchè l'orlo interno delle due basi si rigonfia sollevandosi, si contrae invece l'orlo esterno e si forma un restringimento nella parte media del cilindro (vedi le figure 6, 7, 8, 9 della Nota precedente). Ancora più sensibili e più singolari sono le deformazioni che si hanno nel caso del taglio uniforme, giacchè il corpo cessa dall'essere simmetrico dopo la distorsione.

Mi permetto nella presente Nota di sviluppare questo caso, sebbene i calcoli siano alquanto complicati, ma anche in questo, come nel precedente, i risultati preveduti dal calcolo sono così bene confermati dall'esperienza che il caso stesso costituisce un esempio istruttivo nella scienza dell'elasticità, tanto più che la sola intuizione, senza essere guidata dal calcolo, o dalle esperienze, non avrebbe potuto condurre a prevedere, nemmeno in modo

(1) Seduta del 18 giugno 1905.

(2) *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Seduta del 2 aprile 1905.

grossolano e qualitativo, quale deformazione viene indotta nel corpo dalla distorsione.

Si giunge così ad un risultato molto curioso ed è che preso un anello simmetrico avente la forma di un cilindro cavo è impossibile restringerlo conservandogli la forma cilindrica col togliere una fetta e col risaldare poscia le due faccie del taglio, perchè, se si fa un taglio radiale il corpo viene ad assumere la forma indicata nella figura 6 della Nota precedente, se il taglio

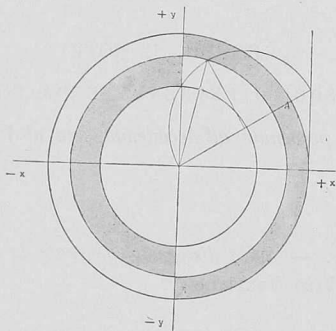


FIG. 1.

è uniforme il corpo cessa dall'essere simmetrico e prende la forma indicata nella fig. 6 di questa Nota.

Mediante un taglio che possa considerarsi come risultante di un taglio o di una zeppa radiale e di un taglio o di una zeppa a faccie parallele si giunge sempre ad uno stato di deformazione in cui la simmetria rispetto all'asse è perduta.

In pratica i fabbri, se debbono restringere un tubo, asportandone una fetta, sogliono fare dapprima un taglio radiale poi, prima di riaccostare le faccie del taglio ne limano la parte interna in modo da poterle far combaciare col minimo sforzo possibile ⁽¹⁾ e poi saldano. In tal modo però, il taglio non essendo più radiale, il tubo non conserva la forma d'un solido di rivoluzione.

⁽¹⁾ Per formarsi un'idea della grandezza di queste azioni supponiamo che il nostro cilindro cavo sia un anello di acciaio simmetrico a sezione rettangolare il cui diametro medio sia di 5^{cm.} e lo spessore di 1^{cm.} Applichiamo la formula (III) della Nota precedente prendendo $E = 19549$ (Cg per mmq. Wertheim) $\eta = 0,3$, $\rho = 2,5$, $s = 1$ e assu-

2. Riprendiamo la fig. 2 della Nota precedente e cerchiamo le formule relative alla fessura uniforme.

Supponiamo che l'asse z sia l'asse di simmetria e che il taglio si sia eseguito lungo il piano x, z dalla parte delle x positive. Facendo nelle formole del § 2 dell'Art. III della 2^a Nota (1) $l = n = p = q = r = 0$,

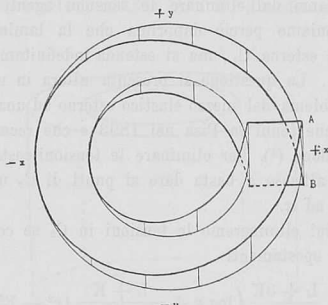


Fig. 2.

avremo

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\frac{1}{2} \frac{m}{2\pi} \log(x^2 + y^2) \\ v = \frac{m}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

le quali corrispondono al taglio uniforme di ampiezza m . Però il corpo sarà soggetto a tensioni superficiali che si equilibrano fra loro. (Vedi Art. I della 2^a Nota).

Denotiamo rispettivamente con R_2 e con R_1 i due raggi interno ed esterno del cilindro cavo che costituisce l'anello. Con un facile calcolo avremo le sei caratteristiche della deformazione e delle tensioni da cui si ricava che le tensioni saranno nulle sulle due basi, mentre quelle unitarie agenti sulle

miamo $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{360}$ (supponendo che l'ampiezza angolare della fessura radiale sia di 1°)

$\xi = 0,5$ onde calcolare la pressione nelle regioni adiacenti alla superficie esterna. Si otterrà $F = 10,7$ ossia la pressione o la tensione calcolate saranno di 10⁶,7 per mmq. e per ogni grado di ampiezza angolare della fessura radiale fatta nell'anello. Questi sforzi si hanno quando si suppongono le basi sollecitate dalle azioni che le mantengono piane ed alle distanze primitive. Calcolando tali azioni mediante le formole (II') della Nota precedente si trova che esse raggiungono il valore di 3⁶,6 per mmq. agli orli delle basi.

(1) Seduta del 19 febbraio 1905.

superficie laterali risulteranno parallele all'asse x e rispettivamente eguali

$$a \frac{Km}{\pi R_1} \text{ sulla superficie esterna e a } -\frac{Km}{\pi R_2} \text{ sulla superficie interna.}$$

Conviene ora eliminare queste tensioni laterali. A tal fine si può operare nel modo seguente. Si può prescindere dalla coordinata z e sostituire al corpo che si studia una lamina elastica limitata da due cerchi di raggi R_2 e R_1 . Cominciamo dall'eliminare le tensioni agenti sulla circonferenza interna C_2 . Supponiamo perciò dapprima che la lamina non sia limitata dalla circonferenza esterna C_1 , ma si estenda indefinitamente in tutti i sensi esternamente a C_2 . La questione si presenta allora in modo perfettamente analogo ad un problema del mezzo elastico esterno ad una sfera che ho risoluto in un corso che tenni in Pisa nel 1893 e che recentemente venne ripreso dal prof. Tedone (1). Per eliminare le tensioni costanti che sollecitano C_2 parallelamente all'asse x basta dare ai punti di C_2 una traslazione conveniente parallela ad x .

In altri termini elimineremo le tensioni in C_2 se comporreemo gli spostamenti (1) cogli spostamenti

$$(2) \quad \begin{cases} u' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+3K}{L+2K} \left(\log r + \frac{L+K}{2(L+3K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right) \\ v' = \frac{m}{2\pi} \frac{L+K}{2(L+2K)} (r^2 - R_2^2) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

in cui $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed L e K denotano le solite costanti dell'elasticità (Vedi 1^a Nota, Art. 2^o, § 2).

Però in tal modo, componendo le tensioni precedentemente agenti su C_1 in virtù degli spostamenti (1), con quelle generate in C_1 dagli spostamenti (2) si trovano su C_1 le tensioni di componenti

$$\begin{cases} -\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \cos 2\vartheta \\ -\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)} \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^3} \sin 2\vartheta \end{cases}$$

ove si è posto $\vartheta = \arctg \frac{y}{x}$, ossia con ϑ si rappresenta l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse x .

Ora queste ultime tensioni possono eliminarsi sia mediante gli spostamenti

$$(3) \quad \begin{cases} u'' = \frac{2A}{4K(L+K)} \left\{ (3L+5K) y^2 + (L-K) x^2 \right\}, \\ v'' = -\frac{2A}{4K(L+K)} (L+3K) xy, \end{cases}$$

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XVII, 1903, pag. 253.

sia mediante gli spostamenti

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} u''' &= B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}, \\ v''' &= B \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right.$$

scegliendo convenientemente le costanti A e B, o mediante una combinazione lineare di ambedue.

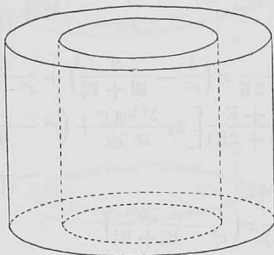


FIG. 3.

Ci si può ora giovare della arbitrarietà di questa combinazione lineare per far sì che gli spostamenti risultanti di (1), (2), (3), (3') generino tensioni nulle non solo su C_1 , ma anche sul cerchio C_2 . In questa maniera si giunge finalmente alle formole

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2] \right\} \\ V &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}. \end{aligned} \right.$$

4. Le formole precedenti a cui si aggiunga l'altra

$$(I') \quad W = 0$$

ci danno le componenti degli spostamenti dovuti ad una distorsione generata da una fessura uniforme di ampiezza m nella ipotesi che le due

basi siano sollecitate da forze che le conservano piane ed alla loro primitiva distanza.

È facile calcolare le corrispondenti caratteristiche delle tensioni. Esse risultano

$$(4) \quad t_{11} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{L-K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\}$$

$$(5) \quad t_{22} = \frac{mK}{\pi} \left\{ \frac{L}{L+2K} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) + \frac{x}{x^2 + y^2} + \right. \\ \left. + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^3 \log r}{\partial x \partial y^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} x \right\}$$

$$(6) \quad t_{33} = \frac{mKL}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right)$$

$$(7) \quad t_{12} = \frac{mK}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \frac{\partial \log r}{\partial y} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left[2y \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2x \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} + 2 \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{2(L+K)}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} y \right\}$$

$$(8) \quad t_{23} = t_{31} = 0.$$

Da queste formole si ricava

$$t_{11}x + t_{12}y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$$

$$t_{21}x + t_{22}y = \frac{mK}{\pi} \frac{L+K}{L+2K} \frac{(r^2 - R_1^2)(r^2 - R_2^2)}{R_1^2 + R_2^2} \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y}$$

quantità che si annullano per $r = R_1$, $r = R_2$, il che verifica l'annullarsi delle azioni esterne sulle superficie laterali del cilindro cavo.

Si ha poi come valore della dilatazione cubica

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{mK}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

Possiamo quindi stabilire la divisione della parte dilatata dalla parte compressa del corpo elastico.

Tracciamo perciò la linea

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$$

che è la circonferenza intermedia della fig. 1 compresa fra le due circonferenze estreme di raggi R_1 e R_2 . Tiriamo poi la linea $x=0$ ossia l'asse delle y . Queste due linee divideranno la corona circolare in quattro regioni che abbiamo rispettivamente distinte in *chiaro* ed in *scuro*. Le regioni *chiaro* rappresenteranno le proiezioni sul piano xy delle parti *dilatate* del corpo elastico e le regioni *scuro* rappresenteranno le proiezioni sullo stesso piano delle parti *comprese* del corpo.

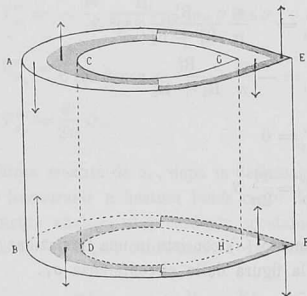


FIG. 4.

Nella figura è stata indicata la costruzione che deve farsi per ottenere la circonferenza intermedia. Essa è evidente, tanto che non ha bisogno di spiegazione.

5. Passiamo ora alla determinazione della forma assunta dal corpo elastico dopo la distorsione, sempre nella ipotesi che le due basi siano mantenute piane ed alla loro primitiva distanza.

Perciò basterà che vediamo come si deformano le basi stesse. Ora mediante le (I) possiamo calcolare i valori di U e V sulle due circonferenze σ_1 e σ_2 aventi rispettivamente i raggi R_1 e R_2 le quali formano il primitivo contorno delle due basi.

Denotando i valori stessi cogli indici σ_1 e σ_2 avremo

$$\left\{ \begin{aligned} U_{\sigma_1} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log R_1 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\vartheta \right\} \\ V_{\sigma_1} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \vartheta - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\vartheta \right\} \\ U_{\sigma_2} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log R_2 + \frac{L+K}{L+2K} \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \cos 2\vartheta \right\} \\ V_{\sigma_2} &= \frac{m}{2\pi} \left\{ \vartheta - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} \sin 2\vartheta \right\} \end{aligned} \right.$$

Gli spostamenti U_{σ_1} , V_{σ_1} si possono decomporre in tre spostamenti elementari (a), (b), (c) aventi rispettivamente per componenti

$$(a) \quad \begin{cases} U'_{\sigma_1} = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_1 - \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \\ V'_{\sigma_1} = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} U''_{\sigma_1} = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin^2 \vartheta \\ V''_{\sigma_1} = -\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} U'''_{\sigma_1} = 0 \\ V'''_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi} \vartheta. \end{cases}$$

Il primo spostamento (a) consiste in una traslazione parallela all'asse x la quale non altera la figura della circonferenza σ_1 .

Abbiamo poi

$$U''_{\sigma_1} \cos \vartheta + V''_{\sigma_1} \sin \vartheta = 0$$

$$U''_{\sigma_1} \sin \vartheta - V''_{\sigma_1} \cos \vartheta = \frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta.$$

Ciò prova che il secondo spostamento (b) muove ciascun punto della circonferenza tangenzialmente alla circonferenza stessa della quantità

$$\frac{m}{\pi} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta,$$

ossia con questo secondo spostamento i punti della circonferenza σ_1 si conservano sempre sopra di essa a meno di quantità del 2° ordine, trascurabili quindi.

Per il terzo spostamento (c) ciascun punto σ_1 si muove parallelamente all'asse y di una quantità proporzionale all'arco del cerchio σ_1 , compreso fra l'origine degli archi e il punto stesso.

Vediamo dunque che, se si trascurano quantità del 2° ordine, la forma assunta dal cerchio σ_1 per la deformazione si otterrà senz'altro trascurando gli spostamenti (a) e (b) e tenendo conto del solo spostamento (c).

Una analoga decomposizione in tre spostamenti elementari (a'), (b'), (c') si può operare sopra gli spostamenti U_{σ_2} , V_{σ_2} , cioè essi si decompongono nei seguenti spostamenti elementari:

$$\begin{aligned}
 (a') \quad & \left\{ \begin{aligned} U'_{\sigma_2} &= \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log R_2 - \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \\ V'_{\sigma_2} &= 0 \end{aligned} \right. \\
 (b') \quad & \left\{ \begin{aligned} U''_{\sigma_2} &= \frac{m}{\pi} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin^2 \vartheta \\ V''_{\sigma_2} &= -\frac{m}{\pi} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \right. \\
 (c') \quad & \left\{ \begin{aligned} U'''_{\sigma_2} &= 0 \\ V'''_{\sigma_2} &= \frac{m}{2\pi} \vartheta. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Per avere la forma assunta da σ_2 , dopo la deformazione, gli spostamenti (a') e (b') potranno trascurarsi e basterà tener conto del solo terzo spostamento (c') perfettamente analogo al precedente spostamento (c).

I due spostamenti (a) e (a') consistono in due traslazioni. La loro differenza sarà

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right)$$

Ponendo $\frac{R_1 - R_2}{R_1} = \gamma$ e sviluppando l'espressione precedente per le potenze ascendenti di γ otterremo

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right),$$

ossia, introducendo il modulo di elasticità E e il coefficiente di Poisson η , (Cfr. Nota precedente, § 6) avremo

$$\delta = \frac{m}{2\pi} \frac{(1-2\eta)}{2(1-\eta)} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right),$$

quindi, se lo spessore dell'anello è piccolo rispetto al suo raggio esterno, questa differenza δ delle due traslazioni sarà trascurabile.

Nella fig. 2, prendendo come origine degli archi dei due cerchi σ_1 e σ_2 il loro incontro coll'asse x dalla parte negativa di esso, abbiamo costruito i contorni delle basi deformate. Le due circonferenze disegnate con linee sottili rappresentano i contorni primitivi delle due basi. Le due linee disegnate più grosse rappresentano i contorni delle basi deformate. I tratti rettilinei sono gli spostamenti subiti dai punti del contorno in virtù degli spostamenti (c) e (c'). Il tratto AB rappresenta l'ampiezza del taglio. La differenza δ è stata trascurata.

6. La formula (6) ci dà il t_{33} che espresso mediante il modulo di elasticità ed il coefficiente di Poisson si scriverà

$$t_{33} = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right).$$

Tenendo quindi conto di questa formula e dei precedenti risultati potremo enunciare il teorema:

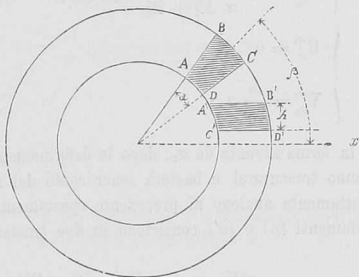


Fig. 5.

Un cilindro cavo di rivoluzione, che ha subito una distorsione (distorsione di ordine 1) dovuta ad una fessura uniforme, conserva le sue basi piane ed alla loro distanza primitiva, mediante delle forze normali agenti sulle basi stesse date da

$$P = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right),$$

intendendo di prendere positivamente le azioni dirette verso l'interno del corpo e negativamente quelle dirette in senso opposto. Contemporaneamente le basi si deformano secondo le leggi stabilite precedentemente (Vedi fig. 2).

La fig. 1 si può dunque interpretare in un nuovo modo. Supponendo che la corona circolare rappresenti una delle basi nella sua forma primitiva, la regione scura rappresenterà quella parte della base che dopo la distorsione dovrà comprimersi dall'esterno e la regione chiara quella che dovrà stirarsi dall'esterno affinché le basi stesse si conservino piane ed alla distanza primitiva.

7. La fig. 3 ci rappresenta il cilindro iniziale prima della distorsione e la fig. 4 lo stesso cilindro dopo la distorsione allorché le basi sono conservate piane ed alla distanza primitiva. Le basi stesse sono divise in quattro regioni rispettivamente chiare e scure. Le regioni scure sono quelle com-

presse dall'esterno e le regioni *chiare* quelle invece *tese* dall'esterno. Il senso di queste azioni esterne si otterrà invertendo la direzione delle frecce disegnate nella figure stessa.

È facile comporre queste azioni agenti sulle basi. Consideriamo dapprima una striscia radiale ABCD di una delle basi, di apertura angolare α , e la cui linea mediana formi coll'asse x un angolo β (vedi fig. 5).

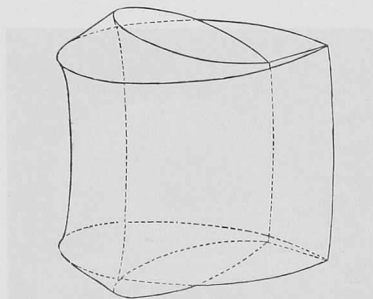


FIG. 6.

Calcoliamo la risultante delle azioni P agenti sulla striscia ABCD. Con un semplice calcolo otterremo

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2 a}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} \cos \beta \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

ove a denota l'area della striscia.

Se la striscia sarà infinitamente sottile potremo sostituire l'unità al

rapporto $\frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ e avremo

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} a \cos \beta,$$

ossia posto

$$-\frac{m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{3(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)} = M$$

si avrà

$$M a \cos \beta,$$

cioè l'azione risultante sarà proporzionale all'area della striscia infinitamente sottile e al coseno dell'angolo che essa forma coll'asse x .

Consideriamo ora una striscia A'B'C'D' compresa fra due parallele all'asse x e fra i due cerchi limitanti le basi la cui grossezza sia h . La risultante delle azioni P agenti sopra A'B'C'D' sarà

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\log \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) h,$$

ossia l'azione risultante sarà proporzionale alla grossezza della striscia.

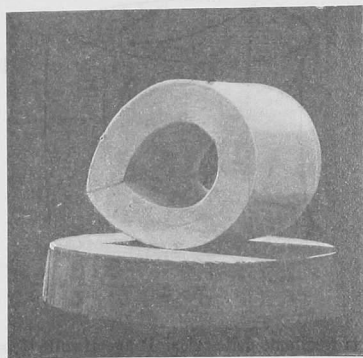


Fig. 7.

Se sviluppiamo l'espressione precedente secondo le potenze ascendenti di γ (cfr. § 5) otterremo

$$-\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \left(\frac{1}{3} \gamma^3 + \dots \right) h.$$

Supponendo l'anello sottile e trascurando le potenze di γ superiori alla prima, tanto questa espressione come quella di M risultano trascurabili e l'espressione di P può scriversi

$$P = \frac{2m}{\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} \frac{\xi}{R_1^2 + R_2^2} \cos \vartheta$$

avendo posto il raggio vettore

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}} + \xi$$

e chiamando ϑ l'angolo che il raggio vettore forma coll'asse x .

In questa ipotesi ogni striscia radiale delle basi può riguardarsi approssimativamente come soggetta ad una coppia.

8. Cerchiamo ora la forma che assumerà il cilindro allorchè non si sottopongano più le basi alle azioni P, ma si lascino libere, cioè vediamo la forma che assume il cilindro in virtù della sola distorsione allorchè nessuna forza esterna lo sollecita.

Basterà perciò applicare i principi che abbiamo stabiliti nella Nota II, art. 1°, § 2 (cfr. anche Nota precedente, § 9) e quindi studiare la deformazione di un corpo avente nello stato naturale la forma rappresentata dalla

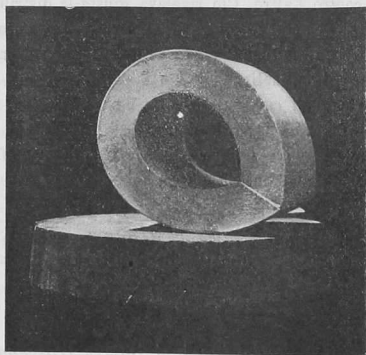


FIG. 8.

fig. 4 e soggetto sopra le due basi alle azioni — P. Bisognerà dunque supporre che il corpo stesso sia teso in ogni elemento delle basi stesse lungo le regioni rappresentate in scuro nella fig. 4 e sia invece compresso nelle regioni chiare, in altri termini che le basi siano soggette alle forze rappresentate dalle frecce nella fig. 4.

Possiamo procedere in modo analogo a quello seguito nella trattazione simile della Nota precedente (cfr. § 9) e supporre cioè diviso il corpo in tante fette radiali. Le coppie agenti sulle basi fletteranno le fette giacenti a sinistra in modo da sollevare l'orlo interno in C ed abbassarlo in D (vedi fig. 4) mentre abbasseranno l'orlo esterno in A e lo solleveranno in B. Nel tempo stesso le generatrici AB si curveranno assumendo una concavità e le generatrici CD diverranno convesse. Il contrario dovrà verificarsi a destra, ma se si tien conto della resistenza che presenta lo spigolo EF la curvatura assunta dalle generatrici EF e GH sarà meno sensibile.

La forma assunta dal corpo sarà perciò quale è rappresentata nella fig. 6 in cui le deformazioni si sono esagerate per renderle facilmente visibili.

Debo alla gentilezza dell'ing. Jona della casa Pirelli di Milano l'aver potuto istituire un confronto fra i risultati del calcolo e l'esperienza.

Egli mi procurò un grosso cilindro cavo di caoutchouc dell'altezza di 7^{cm},7 circa, i cui raggi interno ed esterno erano rispettivamente di 2^{cm},95 e 5^{cm} nel quale tagliò una fetta a faccie parallele della grossezza di 2^{cm},3, saldando poi le faccie della fenditura. Il cilindro venne fortemente legato con spago e quando si scioglieva tendeva ad aprirsi lungo la saldatura dalla parte interna, mentre i due orli esterni della saldatura erano fortemente compressi l'uno contro l'altro. Ciò rivelava giusta la distribuzione delle tensioni lungo il taglio che il calcolo aveva preveduta. Per potere conservarne la forma, giacchè il cilindro lasciato a sè tendeva ad aprirsi, ne fu gettato lo stampo in gesso di cui nelle figg. 7 e 8 riproduciamo le fotografie in due posizioni diverse le quali confrontate colla fig. 6 mostrano la perfetta analogia colla forma indicata dai calcoli.

Debo esprimere i più vivi ringraziamenti al sig. prof. Eugenio Alessandrini per i disegni contenuti in questa Nota che egli cortesemente mi fece.

Errata corrige alla Nota: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici*. Seduta del 18 giugno 1905 a pag. 648 la formula (III) deve scriversi togliendo un fattore 2 al denominatore.

Matematica. — *Sulle funzioni intere trascendenti*. Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Molte proprietà delle funzioni intere trascendenti, si possono riguardare, in certa qual guisa, come limiti di note proprietà dei polinomi. A questa idea è appunto informato il presente lavoro. Il metodo seguito mi sembra di qualche interesse, sia per l'indole affatto elementare, sia perchè può essere utilizzato, se non erro, in molte ricerche, non solamente nel campo delle funzioni intere, ma in quello altresì delle funzioni analitiche più generali. Inoltre mi pare che le considerazioni e i risultati ottenuti, rechino un qualche contributo allo studio delle funzioni intere, particolarmente per ciò che riguarda il loro comportamento nell'intorno di un punto qualunque.

Sia

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

una trascendente intera ed J_0 l'insieme formato dalle radici delle equazioni algebriche $f_n(x) = 0$, essendo:

$$f_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, (n = 1, 2, \dots, \infty).$$