ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 15 ottobre 1905.

Matematica. — *Sulla deformazione dei paraboloidi.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Proseguendo i nuovi studî sulla deformazione delle quadriche, di cui un primo saggio, concernente le superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda, è comparso in questi medesimi Rendiconti (Seduta del 21 maggio 1905), ho potuto estendere questi risultati alle deformate dell'*ellissoide schiacciato* e ad altre tre classi, distinte dal punto di vista reale, di superficie reali applicabili sull'*ellissoide immaginario*. Ne è sorta per tal modo una teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde, perfettamente analoga a quella delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante, della quale tratto diffusamente in una Memoria ora in corso di stampa nel T. XIV delle Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

L'elemento essenziale geometrico per la nuova teoria è dato da una classe di congruenze rettilinee W [1] le cui due falde focali sono applicabili l'una sull'altra e sopra una medesima quadrica rotonda. Tali congruenze sono appunto una generalizzazione delle *congruenze pseudosferiche*, le cui due falde focali, avendo la medesima curvatura costante negativa, sono applicabili l'una sull'altra e sulla sfera immaginaria.

[1] Col nome di congruenze W si indicano quelle sulle cui falde focali le linee assintotiche si corrispondono.

D'altra parte varî risultati complementari, ottenuti nel corso di questi studî, mi avevano condotto a pensare che non solo per le quadriche rotonde ma ben anche per le quadriche *generali* l'elemento geometrico delle indicate congruenze W dovesse conservare il suo significato fondamentale e la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche potesse così, semplificandosi, raggiungere il grado stesso di sviluppo conseguito dalla teoria delle superficie di curvatura costante.

Queste previsioni geometriche hanno intanto ricevuto una completa conferma per quanto riguarda le quadriche generali prive di centro o *paraboloidi*; e dei risultati ottenuti mi propongo appunto di dare notizia nella presente comunicazione. Le ricerche sulla deformazione dei paraboloidi già da me esposte nel T. IX, Serie 3ª degli Annali di Matematica (1903), opportunamente sviluppate ed interpretate nel nuovo senso geometrico, mi hanno dato qui il modo di raggiungere l'intento.

Quanto alle superficie applicabili sulle quadriche generali *a centro* è da pensarsi che si perverrà ad un perfezionamento corrispondente della teoria utilizzando il risultato fondamentale, stabilito dal Darboux nel 1899, che collega la deformazione delle quadriche alle superficie isoterme *speciali*, e gli studî ulteriori sulle trasformazioni di queste ultime superficie da me esposti l'anno scorso nel T. XI degli Annali [1].

2. Limitandoci per ora al caso dei paraboloidi, ecco l'enunciato della prima proposizione fondamentale per la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili su queste quadriche:

Teorema A). *Ogni superficie applicabile sul paraboloide generale, ellittico od iperbolico, appartiene come prima falda focale ad una doppia infinità di congruenze* W, *la cui seconda falda è applicabile sul paraboloide stesso.*

Il passaggio da una deformata S del paraboloide ad un'altra deformata S_1, che formi insieme con S le due falde focali di una delle ∞^2 congruenze W considerate nel teorema, costituisce una delle ∞^2 *trasformazioni* della superficie S.

Data la superficie S, le operazioni analitiche necessarie per costruire le trasformate S_1 consistono nell'integrazione di un'equazione differenziale del tipo di Riccati, precisamente come per costruire le trasformate di Bäcklund di una data superficie pseudosferica. Ed anche qui delle due costanti arbitrarie, che figurano nella trasformazione generale della data superficie S, una entra già nei coefficienti della indicata equazione di Riccati. Denoteremo tale costante con σ e una qualunque delle trasformazioni corrispondenti sarà indicata col simbolo B_σ.

[1] *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche.*

Dalle proprietà delle equazioni di Riccati segue che, nota *una* delle trasformate S_1 della superficie iniziale S per mezzo di una B_σ, le altre ∞^1 superficie trasformate, corrispondenti al medesimo valore della costante σ si ottengono eseguendo semplicemente *quadrature*. E poichè della S_1 conosciamo già una trasformata, la S, basteranno quadrature per costruire le ∞^1 trasformate della nuova S_1 per la medesima B_σ, e così via di seguito.

Ma un nuovo ed importante passo nella teoria si può compiere servendosi della seconda proposizione fondamentale, che diciamo il *teorema di permutabilità*:

Teorema B). *Se da una superficie* S *applicabile sul paraboloide generale (ellittico od iperbolico) si ottengono due nuove deformate* S_1, S_2 *del paraboloide stesso mediante due delle nostre trasformazioni* B_{σ_1}, B_{σ_2}, *a costanti* σ_1, σ_2 *differenti, esiste una quarta superficie* S' *della medesima specie, pienamente determinata e costruibile in termini finiti da* S, S_1, S_2, *che è legata, come la* S, *alle due medesime* S_1, S_2 *da due trasformazioni* B'_{σ_2}, B'_{σ_1} *colle stesse costanti* σ_2, σ_1 *invertite.*

È questo, come si vede, l'analogo del teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie pseudosferiche; da esso segue ancor qui, come principale corollario, la proposizione seguente:

Quando di una deformata S *del paraboloide si conoscono tutte le* ∞^2 *superficie trasformate, l'applicazione successiva ed illimitata del processo di trasformazione non richiede più alcun calcolo d'integrazione.*

In questo caso si trovano per esempio le superficie *di traslazione*, con curve generatrici in piani perpendicolari applicabili sui paraboloidi; abbiamo così un effettivo gruppo di deformate dei paraboloidi, contenente un numero grande ad arbitrio di costanti, che si ottengono tutte in termini finiti con soli calcoli di derivazione.

3. Coi teoremi precedenti la teoria delle superficie applicabili sui paraboloidi generali raggiunge evidentemente lo stesso grado di sviluppo della teoria delle superficie pseudosferiche.

All'enunciato delle nostre proposizioni generali, in particolare del teorema fondamentale A), è necessario aggiungere alcune osservazioni complementari che ne precisano l'estensione. Nel teorema A) l'applicabilità delle superficie di cui si tratta è intesa nel senso generale analitico: come equivalenza dei loro ds^2, per formole di corrispondenza *reali od immaginarie.*

Dal punto di vista reale, e limitatamente al caso attuale dei paraboloidi, dobbiamo aggiungere quanto segue:

Scrivendo l'equazione del paraboloide ellittico od iperbolico sotto la forma normale

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z,$$

esprimiamone il quadrato ds^2 dell'elemento lineare per i parametri α, β dati da

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{p}} \quad , \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{q}} \; ;$$

avremo

$$(1) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 \pm 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2 .$$

Una superficie reale S, data dalle formole

$$x = x(\alpha, \beta) \quad , \quad y = y(\alpha, \beta) \quad , \quad z = z(\alpha, \beta),$$

che in un campo reale di variabilità per α, β abbia l'elemento lineare (1), è da dirsi applicabile sul paraboloide in senso ristretto, cioè la regione reale di S è applicabile sulla regione reale del paraboloide.

Ora se nella (1) cangiamo ad esempio β in $\beta\sqrt{-1}$, abbiamo il nuovo

$$(2) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 \mp 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q)\, d\beta^2$$

equivalente, nel senso generale analitico, al ds^2 dato dalla (1). Se consideriamo una superficie *reale* S che per valori reali di α, β abbia l'elemento lineare (2), noi la diciamo ancora (nel senso generale) applicabile sul paraboloide; però questa volta l'indicata regione reale di S non è applicabile sulla regione reale del paraboloide, bensì sopra una regione immaginaria o ideale della quadrica. Diremo per ciò, usando un'opportuna denominazione del geometra russo Peterson, che in questo caso la S è applicabile sul paraboloide *fuori dei limiti*, mentre nel primo caso l'applicabilità si dirà propria o dentro ai limiti.

Ora il nostro teorema A) si applica indistintamente alle quattro corrispondenti forme di ds^2:

$$a) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2$$

$$b) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q)\, d\beta^2$$

$$c) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 + 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2$$

$$d) \qquad ds^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 - q)\, d\beta^2,$$

delle quali la prima e la terza appartengono all'effettiva regione reale del paraboloide iperbolico od ellittico rispettivamente, la seconda e la quarta alle loro regioni ideali. Ma se si tratta delle prime due forme (paraboloide iperbolico) le due falde focali S, S_1 delle congruenze W del teorema A) appartengono insieme o alla specie *a*) o alla specie *b*), cioè S, S_1 sono applicabili propriamente (in senso ristretto) l'una sull'altra. Per le due seconde forme *c*) *d*) invece (paraboloide ellittico) le due falde focali S, S_1 appartengono l'una alla specie *c*), l'altra alla *d*), cioè una di esse è applicabile

sul paraboloide propriamente o dentro ai limiti, l'altra impropriamente o fuori dei limiti. Nel caso adunque di una superficie S applicabile propriamente sul paraboloide ellittico è necessario applicare un numero *pari* di volte le nostre trasformazioni per ottenere una nuova superficie applicabile ancora propriamente sul paraboloide; con un numero dispari di tali trasformazioni si ottiene al contrario una deformata impropria o fuori dei limiti.

Dobbiamo da ultimo avvertire che il teorema A) non è applicabile al caso particolare del paraboloide rotondo, o meglio le ∞^2 congruenze di cui si parla si riducono in questo caso all'unica congruenza formata dalle tangenti alle deformate delle parabole meridiane e la seconda falda focale diventa la superficie complementare del paraboloide, che è applicabile, fuori dei limiti, sul paraboloide stesso.

Insomma, dal nostro punto attuale di vista, si comporta più semplicemente il paraboloide ellittico generale che non il paraboloide rotondo. Per altro di questa speciale superficie conosciamo già in termini finiti tutte le deformate (Darboux) e la teoria delle loro trasformazioni, quale consegue dai teoremi di Guichard e dalla teoria delle superficie d'area minima [1], è ben lungi dal presentare l'interesse inerente agli altri casi, ove i metodi stessi costituiscono un vero e proprio processo d'integrazione.

4. Non è mia intenzione dare qui tutte le formole relative alle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi; il lettore potrà vederne ampiamente svolta la teoria in una Memoria che si pubblicherà fra breve negli Annali di Matematica. Soltanto, per far conoscere il metodo di trasformazione, darò qui le formole relative ad uno dei casi.

Considero una superficie S applicabile propriamente (dentro ai limiti) sul paraboloide iperbolico, e tale di più che il doppio sistema coniugato (u, v) che si conserva coniugato nel passaggio dalla configurazione S a quella paraboloidica sia formato di due sistemi di linee reali e distinte. Una tale deformata S (di prima specie) del paraboloide è definita *intrinsecamente* come segue [2]. Scelte le dimensioni del paraboloide in guisa che sia

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

indichiamo con θ una funzione di u, v che soddisfi l'equazione a derivate parziali del secondo ordine:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \operatorname{senh} \theta \cosh \theta .$$

[1] Cfr. le mie *Lezioni*, vol. II, pp. 332 segg.

[2] Cfr. la citata Memoria del T. IX degli Annali, § 7 *b*).

Siano poi $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ quattro funzioni di u, v che soddisfino al sistema lineare:

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \lambda \cosh\theta \quad , \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta \, , \\[2ex]
\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu - \dfrac{\cosh\theta}{p}\alpha - \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{q}\beta \quad , \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda \\[2ex]
\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \mu \operatorname{senh}\theta \quad , \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = \mu \cosh\theta \, , \\[2ex]
\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu \quad , \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda + \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{p}\alpha + \dfrac{\cosh\theta}{q}\beta \, ;
\end{cases}
$$

Questo è un sistema lineare illimitatamente integrabile e possiede l'integrale quadratico

$$\mu^2 - \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{p} - \frac{\beta^2}{q} = \text{cost.}$$

Scegliendo i valori *iniziali* di $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ per modo che la costante del 2° membro risulti $= 1$, che sia cioè

$$(\mathrm{B}^*)\qquad \mu^2 - \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{p} + \frac{\beta^2}{q} + 1 \, ,$$

ne risulta definita intrinsecamente la nostra deformata S mediante le sue due forme quadratiche fondamentali [1]:

$$(3)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\alpha^2 + p)\, d\alpha^2 - 2\,\alpha\beta\, d\alpha\, d\beta + (\beta^2 + q)\, d\beta^2$$

$$(4)\qquad dx\, d\mathrm{X} + dy\, d\mathrm{Y} + dz\, d\mathrm{Z} = \frac{\sqrt{pq}\,\lambda\mu}{\sqrt{q\alpha^2 + p\beta^2 + pq}}\,(du^2 - dv^2)$$

dove nella prima i differenziali $d\alpha, d\beta$ si intendono espressi per du, dv mediante le (B):

$$\begin{cases} d\alpha = \lambda \cosh\theta\, du + \mu \operatorname{senh}\theta\, dv \\ d\beta = \lambda \operatorname{senh}\theta\, du + \mu \cosh\theta\, dv \, . \end{cases}$$

Ciò premesso, ecco come otteniamo le trasformazioni delle nostre superficie. Essendo θ una soluzione della (A), le equazioni simultanee per θ_1

$$
(\mathrm{C})\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\,(\cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1) \\[2ex]
\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \,(\cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1) \, ,
\end{cases}
$$

[1] Qui, al solito, x, y, z denotano le coordinate di un punto mobile sopra S; X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

dove σ indica una costante arbitraria, formano un sistema illimitatamente integrabile e la sua soluzione generale, che contiene una nuova costante arbitraria oltre σ, soddisfa ancora alla (A). Ora da una quaderna $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ di funzioni che soddisfano al sistema lineare (B) ed alla equazione quadratica (B*), noi passiamo ad una nuova quaderna

$$\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$$

che soddisfa le equazioni analoghe (B_1), (B_1^*), cangiato θ in θ_1, mediante le formole di sostituzione lineare:

$$(D) \quad \begin{cases} k\alpha_1 = \cosh\theta_1 . \lambda + \operatorname{senh}\theta_1 . \mu - \operatorname{senh}\sigma . \alpha \\ k\beta_1 = \operatorname{senh}\theta_1 . \lambda + \cosh\theta_1 . \mu + \cosh\sigma . \beta \\ k\lambda_1 = -A\lambda - B\mu - \dfrac{\cosh\theta}{p} \cdot \alpha - \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{q} \cdot \beta \\ k\mu_1 = \quad C\lambda + D\mu + \dfrac{\operatorname{senh}\theta}{p} . \alpha + \dfrac{\cosh\theta}{q} . \beta . \end{cases}$$

Qui k indica una costante data dalla formola

$$k = \sqrt{\operatorname{senh}^2\sigma + \frac{1}{p}} = \sqrt{\cosh^2\sigma - \frac{1}{q}}$$

e i coefficienti A, B, C, D si esprimono nel modo seguente per θ, θ_1:

$$\begin{cases} A = \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 \\ B = \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 \\ C = \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\theta_1 \\ D = \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\theta_1 . \end{cases}$$

Dalle funzioni $\theta_1, \alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ resta così individuata intrinsecamente una nuova deformata S_1 del paraboloide, mediante le formole corrispondenti alle (3), (4)

$$\begin{cases} ds_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = (\alpha_1^2 + p)\, d\alpha_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1\, d\alpha_1\, d\beta_1 + (\beta_1^2 + q)\, d\beta_1^2 \\ dx_1\, dX_1 + dy_1\, dY_1 + dz_1\, dZ_1 = \dfrac{\sqrt{pq}\, \lambda_1 \mu_1}{\sqrt{q\alpha_1^2 + p\beta_1^2 + pq}} (du^2 - dv^2) . \end{cases}$$

Fra i punti delle due deformate S, S_1 del paraboloide risulta una corrispondenza ove si riguardi come corrispondente ad un punto $P \equiv (u, v)$ dell'una, il punto $P_1 \equiv (u, v)$ dell'altra nel quale i parametri u, v hanno i medesimi valori; tale corrispondenza conserva, come è chiaro, i sistemi coniugati.

Tutto ciò concerne ancora soltanto le equazioni *intrinseche* delle due superficie, senza riguardo alla loro posizione relativa nello spazio. Ora è appunto essenziale pel nostro scopo il verificarsi della seguente proprietà: *le due deformate* S, S_1 *del paraboloide possono collocarsi in tale posizione nello spazio che le rette* PP_1 *congiungenti le coppie di punti corrispondenti di* S, S_1 *tocchino nel punto* P *la superficie* S, *nel punto* P_1 *la* S_1; *così le* S, S_1 *risultano le due falde focali di una congruenza* W.

A noi qui basterà dare le formole effettive che, supposta nota la superficie S, fanno conoscere in termini finiti la superficie S_1; esse si scrivono semplicemente nel modo seguente:

$$(E)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) \\ y_1 = y + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) \\ z_1 = z + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Si osservi che, appena nota la superficie S e la soluzione θ_1 delle equazioni (C) che si considera, queste formole (E) danno in termini finiti la superficie S_1, le funzioni λ_1, μ_1 che vi figurano essendo determinate dalle (D). Come si vede, nelle nostre trasformazioni entrano due costanti arbitrarie e cioè la σ ed il valore *iniziale* della θ_1.

Formole perfettamente analoghe alle superiori valgono per tutti gli altri casi delle deformazioni dei paraboloidi.

Matematica. — *Sulle equazioni funzionali lineari.* Nota del Socio S. Pincherle.

È noto come recentemente il Fredholm [1] abbia dato una soluzione generale dell'equazione funzionale

$$(1)\qquad \varphi(x) - k\int_a^b \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x)$$

dove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, e come l'Hilbert [2], che ha dato a codesta equazione il nome di equazione integrale lineare di seconda specie, ne abbia dedotto conseguenze ed applicazioni importantissime, sopratutto nel caso in cui $\alpha(x,t)$ è simmetrica in x, t. L'importanza che viene così ad acquistare l'equazione (1), giustifica la ricerca del posto

[1] Acta Math., T. 27, pag. 365 (1903).
[2] Göttingen Nachrichten, 1904, pag. 49 e seg.