ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Tutto ciò concerne ancora soltanto le equazioni *intrinseche* delle due superficie, senza riguardo alla loro posizione relativa nello spazio. Ora è appunto essenziale pel nostro scopo il verificarsi della seguente proprietà: *le due deformate* S, S_1 *del paraboloide possono collocarsi in tale posizione nello spazio che le rette* PP_1 *congiungenti le coppie di punti corrispondenti di* S, S_1 *tocchino nel punto* P *la superficie* S, *nel punto* P_1 *la* S_1; *così le* S, S_1 *risultano le due falde focali di una congruenza* W.

A noi qui basterà dare le formole effettive che, supposta nota la superficie S, fanno conoscere in termini finiti la superficie S_1; esse si scrivono semplicemente nel modo seguente:

$$(E)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right) \\ y_1 = y + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right) \\ z_1 = z + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\mu_1}{\mu}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Si osservi che, appena nota la superficie S e la soluzione θ_1 delle equazioni (C) che si considera, queste formole (E) danno in termini finiti la superficie S_1, le funzioni λ_1, μ_1 che vi figurano essendo determinate dalle (D). Come si vede, nelle nostre trasformazioni entrano due costanti arbitrarie e cioè la σ ed il valore *iniziale* della θ_1.

Formole perfettamente analoghe alle superiori valgono per tutti gli altri casi delle deformazioni dei paraboloidi.

Matematica. — *Sulle equazioni funzionali lineari.* Nota del Socio S. Pincherle.

È noto come recentemente il Fredholm [1] abbia dato una soluzione generale dell'equazione funzionale

$$(1)\qquad \varphi(x) - k\int_a^b \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x)$$

dove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, e come l'Hilbert [2], che ha dato a codesta equazione il nome di equazione integrale lineare di seconda specie, ne abbia dedotto conseguenze ed applicazioni importantissime, sopratutto nel caso in cui $\alpha(x,t)$ è simmetrica in x, t. L'importanza che viene così ad acquistare l'equazione (1), giustifica la ricerca del posto

[1] Acta Math., T. 27, pag. 365 (1903).
[2] Göttingen Nachrichten, 1904, pag. 49 e seg.

che le compete nella teoria generale delle operazioni; ora, si vede subito come la sua risoluzione sia contenuta come caso particolare — a dir vero, singolarmente interessante — nel problema dell'inversione di un fascio di operazioni distributive. Essendo A e B due tali operazioni, esse danno luogo al fascio

$$B - kA,$$

generalizzazione del fascio di omografie, al quale esso si riduce se le operazioni A e B agiscono su di uno spazio lineare ad un numero finito di dimensioni. Una delle operazioni, B per esempio, si può ridurre all'operazione unità; l'inversa del fascio è allora

$$(1 - kA)^{-1}, \tag{2}$$

e questa inversa dà la risoluzione dell'equazione (1) quando sia

$$A(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, \alpha(x, t)\, dt.$$

In questa Nota, mi propongo di indicare sommariamente espressioni analitiche atte a rappresentare l'operazione (2), ed a mostrare il legame di queste espressioni colla risoluzione della equazione (1) data dal Fredholm, o con quella di un'equazione alquanto più speciale ma pure notevole, profondamente studiata dal Volterra [1] ed incidentalmente dal Le Roux [2]. I risultati accennati senza le dimostrazioni, nella presente Nota, verranno sviluppati in una Memoria più estesa, di prossima pubblicazione.

1. Sia C un insieme di funzioni f di una o più variabili, finite, e tali che la somma di un numero qualsiasi di esse in numero finito, ed anche in numero infinito sotto l'ipotesi della convergenza uniforme, appartenga all'insieme C medesimo.

Sia A un'operazione distributiva univoca, applicabile ad ogni elemento f di C, ed il cui risultato, che si indicherà con $A(f)$, appartenga allo stesso insieme C. L'operazione A sia inoltre continua. S'intende con ciò che ad ogni numero positivo ε corrisponde un numero positivo δ tale che, se è $|f| < \delta$, sia corrispondentemente

$$|A(f)| < \varepsilon.$$

La somma di un numero finito d'operazioni continue è pure un'operazione continua; lo stesso è del prodotto.

2. Supponiamo che per l'operazione A esista un numero positivo r tale che per qualsiasi elemento f di C, e per ogni numero h inferiore ad r in

(1) Atti della R. Accad. di Torino, 1896; e Annali di Matematica, 1897.

(2) Annales de l'Éc. Normale, S. II, T. XII, 1895.

valore assoluto, sia

$$(3) \qquad |A^n(f)| < \frac{1}{|h^n|};$$

mentre per $|h| > r$ ed almeno per qualche elemento di C, la disuguaglianza (3) non abbia luogo. Diremo allora « che A ammette il raggio r nell'insieme C ».

Sotto questa ipotesi, si prenda una successione arbitraria di numeri

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

soggetti solo alla condizione

$$|a_n| < \eta^n r^n$$

con $\eta < 1$, e si consideri la serie:

$$(4) \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Questa serie è assolutamente convergente in tutto C; essa è uniformemente convergente rispetto agli elementi di C e rispetto alle variabili da cui questi elementi dipendono; infine le è applicabile l'operazione A termine a termine. Essa rappresenta quindi un'operazione distributiva univoca in C, commutabile con A. Essa è inoltre continua. Infine $S(f)$ appartiene a C.

3. Facciamo in particolare

$$a_n = k^n, \quad |k| < \eta r, \quad \eta < 1.$$

L'operazione

$$(5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n$$

ammetterà le proprietà enumerate nel numero precedente. Se ora indichiamo con φ la somma della serie (5) ed applichiamo l'operazione A termine a termine alla serie stessa, verrà

$$A(\varphi) = \frac{1}{k}(\varphi - f)$$

o, in altri termini

$$(6) \qquad (1 - kA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n$$

per $|k| < r$.

4. Accanto all'equazione

$$(a) \qquad \varphi - kA(\varphi) = f,$$

la cui soluzione è data, per $|k| < r$, dalla serie (5), vi è da considerare l'equazione, che si può dire omogenea

$$(b) \qquad \omega - k\mathrm{A}(\omega) = 0.$$

Questa equazione non ammette soluzione per ogni valore di k. Così, sotto l'ipotesi del n. 2, l'equazione non ha, nell'insieme C, soluzione per $|k| < r$, poichè da (b) si deduce

$$\mathrm{A}^n(\omega) = \frac{\omega}{k^n},$$

la quale contradice all'ipotesi (3).

Risulta da ciò che per $|k| < r$, l'equazione (a) ammette in C un'unica soluzione, quella rappresentata dalla serie (5).

Se per $k = \bar{k}$ la (b) ammette soluzione, si dirà che ω è un *invariante* di A relativo al numero $\bar{k}$.

5. Tornando all'ipotesi del n. 2, si possono distinguere tre casi: che sia $r = \infty$, $r = 0$, o che r abbia un valore finito. Nel primo caso la serie (5) è una funzione intera di k; essa risolve per ogni k l'equazione (a), che ammette in C l'unica soluzione espressa da quella serie: l'equazione (b) non ha soluzione per alcun valore di k. In questa ipotesi, si vede pure che ha una, ed una sola soluzione in C ogni equazione della forma

$$(c) \qquad a_0\varphi + a_1\mathrm{A}(\varphi) + \cdots a_m\mathrm{A}^m(\varphi) = f.$$

6. Consideriamo ora il caso in cui A ammetta in C un raggio r finito, tralasciando per il momento il caso di $r = 0$. Indichiamo con B un'operazione $1 - k_1\mathrm{A}$; essa, applicata a C, darà un insieme lineare C_1 che coincide con C se è $|k_1| < r$. Nel caso $|k_1| \geq r$, C_1 è contenuto in C, ma può non coincidere con C. Ammettiamo che il raggio di A in C_1 sia $r_1 > |k_1| \geq r$. Sotto questa ipotesi, si trova:

a) che esistono in C uno o più invarianti di A relativi a k_1, i quali formano un insieme lineare Ω_1;

b) che esiste un'operazione T, rappresentata da una serie

$$\mathrm{T} = \Sigma c_n \mathrm{A}^n\mathrm{B},$$

assolutamente ed uniformemente [1] convergente per $|k| < r_1$, la quale trasforma C in C_1, ed un'altra operazione L della medesima forma, che trasforma C in Ω_1.

c) che l'operazione $(1 - k\mathrm{A})^{-1}$, per $|k| < r_1$, si può esprimere mediante

$$(1 - k\mathrm{A})^{-1} = \mathrm{T} + \frac{1}{k - k_1}\mathrm{L};$$

[1] La convergenza uniforme s'intende, come al n. 3, tanto rispetto agli elementi di C quanto alle variabili da cui dipendono questi elementi.

d) che l'insieme C si può scomporre in

$$C = C_1 + \Omega_1 ,$$

C_1 ed Ω_1 essendo senza elementi comuni;

e) che, eccettuato il valore $k = k_1$, l'operazione A non ammette invarianti relativi a numeri k inferiori in modulo ad r_1.

7. Può avvenire che non B, ma B^2 trasformi C in un insieme C_1 in cui il raggio r_1 di A sia superiore ad r. Si trova allora:

a) che esistono in C invarianti di A relativi a k_1, o radici di

$$\omega = k_1 A(\omega) ,$$

i quali costituiscono un insieme lineare Ω_1; ed invarianti di secondo ordine, o radici di

$$\omega - 2k_1 A(\omega) + k_1^2 A^2(\omega) = 0 ,$$

costituenti unitamente ai precedenti un insieme lineare Ω_1';

b) che esistono operazioni T, L, L′ della forma

$$\Sigma c_n A^n B^2$$

convergenti assolutamente ed uniformemente per $|k| < r_1$, e che mutano, la prima, l'insieme C in C_1, la seconda C in Ω_1, la terza C in Ω_1';

c) che per $|k| < r_1$, si ha

$$(1 - kA)^{-1} = T + \frac{1}{k - k_1} L' + \frac{1}{(k - k_1)^2} L ;$$

d) che l'insieme C si può scomporre in

$$C = C_1 + \Omega_1' ;$$

e) che infine non esistono invarianti di A relativi a numeri k minori di r_1 in valore assoluto, ad eccezione di $k = k_1$.

8. I casi precedenti si generalizzano facilmente; il risultato al quale si giunge è il seguente:

Esista un'operazione

$$P = (1 - k_1 A)(1 - k_2 A) \dots (1 - k_s A)$$

dove $k_1, k_2, \dots k_s$ sono numeri fra loro distinti e maggiori di r in valore assoluto, tale che essendo C_1 l'insieme (necessariamente contenuto in C) che essa genera quando si applichi a C, il raggio di A in C_1 sia un numero positivo r_1 maggiore dei valori assoluti di $k_1, k_2, \dots k_s$. Sotto questa ipotesi:

a) Esisteranno in C invarianti di A relativi a k_i $(i = 1, 2, \dots s)$; sia Ω_i lo spazio lineare di questi invarianti.

b) Esiste un'operazione T rappresentata da una serie

$$T = \Sigma c_n A^n P$$

a coefficienti razionali interi in k, assolutamente ed uniformemente convergente per $|k| < r$, che trasforma C in C_1, ed operazioni L_i che applicate a C_1 danno gli elementi di Ω_i.

c) L'operazione inversa del fascio (2) si esprime mediante la formula

$$(1 - kA)^{-1} = T + \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{k - k_i} L_i , \tag{7}$$

valida per tutti i valori di $|k| < r_1$, eccettuato $k = k_i$ $(i = 1, 2, \dots s)$.

d) L'insieme C si scompone nella somma di spazî senza elementi comuni

$$C = C_1 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_s .$$

e) L'operazione A non ammette in C alcun invariante relativo a k per $|k| < r_1$, eccettuati i valori $k_1, k_2, \dots k_s$ di k.

f) L'operazione $(1 - k_i A)^{-1} f$ è possibile se e soltanto se f appartiene allo spazio

$$C - \Omega_i$$

ed ammette infinite soluzioni, deducibili tutte da una di esse mediante l'aggiunta di un elemento di Ω_i.

9. I risultati precedenti si estendono senza difficoltà al caso che l'operazione, mediante la quale si ottiene l'insieme C_1 in cui è aumentato il raggio di A, sia della forma

$$P = (1 - k_1 A)^{q_1} (1 - k_2 A)^{q_2} \dots (1 - k_s)^{q_s} ;$$

essendo $q_1, q_2, \dots q_s$ numeri interi. Solo che, in questo caso, il termine sotto il segno Σ della (7) è sostituito da un'espressione della forma

$$\frac{1}{(k - k_i)^{q_i}} L_i + \frac{1}{(k - k_i)^{q_i - 1}} L_i' + \dots + \frac{1}{k - k_i} L_i^{(q_i - 1)} ;$$

esistono per A invarianti degli ordini $h = 1, 2, \dots q_i$ rispetto a k_i, cioè soluzioni delle equazioni

$$(1 - k_i A)^h = 0 ,$$

e $L_i^{(h-1)}$, applicata a C, dà questi invarianti.

10. Passiamo ad indicare alcune applicazioni di ciò che precede, tralasciando per brevità la più semplice, quella che si riferisce al caso di uno spazio ad un numero finito di dimensioni, nel qual caso la (7) risolve il problema dell'inversione di un fascio di omografie.

Per primo esempio, facciamo

$$A(f) = \int_0^x \alpha(x, t) f(t)\, dt , \tag{8}$$

dove $\alpha(x, t)$ è una funzione di una variabile reale, finita e continua nell'intervallo $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1 . \end{cases}$

Sia C l'insieme delle funzioni di una variabile, finite e continue nell'intervalli fra 0 ed 1, estremi inclusi. Il risultato dell'operazione (8) sarà, per ogni elemento $f(t)$ di C, pure un elemento di C, e tali sono pure i risultati di $A^2, A^3, \ldots$

Sia μ il massimo valore assoluto di $f(t)$, m il massimo valore assoluto di $\alpha(x, t)$ negli intervalli indicati; sarà

$$|A^n(f)| < \frac{\mu m^n x^n}{n!},$$

onde segue che il raggio di A nell'insieme C è infinito. Si è così nel caso considerato al n. 5; l'operazione A non ha invarianti in C, e per ogni k la soluzione dell'equazione (a) è data da

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f). \tag{9}$$

Questa serie si può modificare in modo notevole, mediante un procedimento dovuto al Volterra [1]. Posto

$$\alpha_1(x, t) = \alpha(x, t) \quad , \quad \alpha_{n+1}(x, t) = \int_t^x \alpha_1(x, u)\, \alpha_n(u, t)\, du,$$

viene

$$A^n(f) = \int_0^x f(t)\, \alpha_n(x, t)\, dt,$$

talchè la (9) si può scrivere

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) \sum_{n=1}^{\infty} k^n a_n(x, t)\, dt. \tag{10}$$

La nota legge degli indici

$$A^{m+n} = A^m A^n$$

si traduce qui nella relazione

$$\int_0^x f(t)\, \alpha_{m+n}(x, t)\, dt = \int_0^x \alpha_m(x, t) \int_0^t f(u)\, \alpha_n(u, t)\, du\, dt,$$

di cui il Volterra [2] dà la dimostrazione per via ricorrente.

[1] Atti della R. Accad. di Torino, 12 gennaio 1896.
[2] Lavoro citato, formula (7).

Questi sviluppi permettono di risolvere immediatamente il problema dell'inversione dell'integrale definito

$$\int_0^x \varphi(t)\, \alpha(x\,,\, t)\, dt = f(x) \quad (^1),$$

basta la derivazione rispetto ad x per ricondurre questo problema alla risoluzione di un'equazione (a).

11. Come secondo esempio, l'insieme C essendo il medesimo che al numero precedente e così la funzione $\alpha(x\,,\, t)$, si ponga

$$\mathrm{A}(f) = \int_0^1 f(t)\, \alpha(x\,,\, t)\, dt\,.$$

Qui viene

$$|\mathrm{A}^n(f)| < \mu m^n\,;$$

A ha dunque in C un raggio non inferiore ad $\frac{1}{m}$. Per $|k| < \frac{1}{m}$, l'equazione (a) è dunque risoluta da

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n\, \mathrm{A}^n(f)$$

ed in corrispondenza non esistono invarianti di A.

Ora dal lavoro di Fredholm (²) segue in sostanza che esistono numeri

$$g_n = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \alpha(t_1\,,\, t_1) & \alpha(t_1\,,\, t_2) \ldots \alpha(t_1\,,\, t_n) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha(t_n\,,\, t_1) & \alpha(t_n\,,\, t_2) \ldots \alpha(t_n\,,\, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n\,,$$

ed operazioni funzionali

$$\mathrm{G}_n(f) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} f(x) & f(t_1) \ldots\ldots f(t_n) \\ \alpha(x\, t_1) & \alpha(t_1\, t_1) \ldots \alpha(t_n\, t_1) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha(x_1\, t_n) & \alpha(t_1\, t_n) \ldots \alpha(t_n\, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n$$

tali che si abbia

$$n\mathrm{A}\mathrm{G}_{n-1} = \mathrm{G}_n - g_n f \tag{11}$$

e che le serie

$$\sum \frac{k^n \mathrm{G}_n}{n!} \quad \text{e} \quad \delta(k) = \sum \frac{g_n k^n}{n!}$$

(¹) Lavoro citato e Ann. di Matem., 1897; cfr. Le Roux, Ann. de l'Éc. Norm., 1895; Picard, Comptes Rendus, 25 juillet 1904.

(²) Acta, T. 27.

siano funzioni intere di k. Ne viene, per la (11):

$$\delta(k) \sum k^n \, \mathrm{A}^n(f) = \sum \frac{k^n}{n!} \, \mathrm{G}_n(f) \, ,$$

e quindi, se $k_1 , k_2 , \ldots k_s$ sono tutte e sole le radici di $\delta(k)$ inferiori in modulo ad r_1, si può applicare all'insieme C e all'operazione A le considerazioni del n. 8.

12. Non tutte le operazioni distributive rientrano nella teoria precedente, il cui carattere è *l'esistenza di invarianti solo per valori discreti di k.* Per convincerci di ciò, consideriamo il caso straordinariamente semplice in cui, come operazione A, si assuma senz'altro l'ordinaria derivazione D: operazione cui manca però la proprietà della continuità. Nel campo C considerato nei numeri precedenti, la equazione

$$\varphi - k\mathrm{D}\varphi = f$$

ammette infinite soluzioni per ogni valore di k; in altri termini, ad ogni valore di k corrisponde per D un invariante, che è

$$c\, e^{\frac{x}{k}} ,$$

c essendo una costante arbitraria. La serie

$$\sum k^n \mathrm{D}^n f \tag{12}$$

non converge e non dà la soluzione delle (a') che in un campo C' assai limitato: quello delle funzioni intere

$$\sum \frac{c_n \, x^n}{n!}$$

in cui è $|c_n| < \frac{m}{r^n}$, $r > |k|$. Ma a questa serie (12) non è applicabile la teoria esposta nella presente Nota, a meno che non si riduca ancora il campo funzionale, limitandolo a somme di esponenziali di forma particolare.