ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Delle 10 specie di funghi sotterranei finora raccolti in Portogallo, risultano:

N. 9, presenti in 15 località della provincia di *Beira*, e fra queste n. 6 nella sola *Beira Baixa*.

N. 5 presenti in località dell'*Alemteio*.

N. 2 in 4 località dell'*Estremadura*.

Mancano dati relativi agli ipogei tanto dell'*Algarvia*, come delle provincie nordiche. Finora nessun ipogeo è stato ancora raccolto nel territorio di *Traz os Montes* e di *Entre Douro et Minho*

Notisi che questi dati statistici danno solo un'idea approssimativa della distribuzione areale delle specie ritenute eduli in Portogallo.

Matematica. — *Sulle focali di Minding*. Nota di A. Del Re, presentata dal Socio F. Siacci.

In aggiunta al teorema di Minding, il Darboux (1) dapprima con l'aiuto del primo dei suoi ellissoidi centrali, e poi il prof. Segre (2) con l'uso di una rappresentazione sui punti dello spazio delle rotazioni finite attorno ad un punto fisso, dimostrarono che le due coniche conosciute sotto il nome di *focali di Minding* sono il luogo di un punto al quale si deve tenere legato un corpo soggetto ad un sistema astatico di forze (3), perchè il corpo stesso sia suscettibile di assumere infinite posizioni di equilibrio. Ora, tenendo presente il modo col quale nella mia recente Nota: *Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo* ecc. (Rend. Acc. Napoli, maggio-giugno, 1905) io ho cercate e costruite le quattro posizioni di equilibrio che un corpo siffatto è suscettibile di avere allorchè è legato ad un punto genericamente preso nello spazio, oltre ad arrivare allo stesso risultato in una maniera ovvia e quasi intuitiva, si arriva altresì a costruire le rotazioni che conducono il corpo da una posizione *generale* ad una di quelle infinite posizioni di equilibrio, ed a studiare il modo di distribuzione di queste posizioni fra loro.

(1) *Mémoire sur l'equilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire* etc. (Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux, 2e Série, t. II, 1er Cahier). Cfr. pag. 22 e § IX.

(2) *Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti* ecc. (Memorie della Società Italiana delle Scienze, Serie III, t. VI, 1884). Cfr. § III, in fine, prima parte dell'ultimo enunciato.

(3) Io chiamo *astatico* un sistema di forze applicato ad un corpo rigido, quando alle forze del sistema si attribuisce la qualità di essere mobili intorno ai proprii punti di applicazione con conservazione della intensità di ciascuna forza e della reciproca orientazione di tutte.

1. Poichè la ricerca delle quattro posizioni di equilibrio del corpo allorchè questo è legato ad un punto fisso arbitrario O, dipende dalla ricerca del triangolo coniugato comune alla conica centrale ψ di Darboux ed al sistema antipolare Π, nel piano centrale σ del corpo, rispetto al cerchio φ che ha per centro il piede O' della perpendicolare abbassata da O su σ, e per raggio la distanza $d = OO'$ (cfr. § IV, n. 15, Nota cit.), è evidente che, intorno al punto O saranno possibili infinite posizioni di equilibrio se ψ e Π avranno infiniti triangoli auto-coniugati comuni; vale a dire, detto Γ il sistema polare rispetto a ψ, se il prodotto $\Pi\Gamma$ è un'omologia (necessariamente col centro E, e con l'asse e, in un punto ed una retta che sono polari sia rispetto a Π che rispetto a Γ). Ora, poichè nel prodotto $\Pi\Gamma \equiv \Theta$, i punti O', C (con C indicando il centro di Γ) sono corrispondenti, la retta O'C passerà pel centro E di Θ; e, d'altra parte, poichè il polo della O'C, sia rispetto a Π che rispetto a Γ è il punto all'infinito di e, ne segue per essere e perpendicolare ad O'E $\equiv$ O'C che CO' è un asse di Γ. Dunque, la proiezione normale O' del punto O sul piano centrale σ è un punto di un asse di Γ; vale a dire è O un punto di uno dei due *piani mediani* del corpo, per adoperare una denominazione dovuta al prof. Turazza [1].

2. Per vedere quale è il luogo dei punti O che rispondono al problema, diciamo

$$\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 = 0 \tag{1}$$

l'equazione della conica centrale di Darboux riferita ai suoi assi; le equazioni di tutte le coniche col centro in un asse di Γ, i cui sistemi polari hanno per prodotto con Γ un'omologia, sono quelle dell'una e dell'altra delle due forme

$$\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 - k(y - m)^2 = 0 \tag{2}$$

$$\mu^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 - k(x - m)^2 = 0\,, \tag{3}$$

ove k è un parametro che varia da una conica all'altra, e corrispondentemente è $y - m = 0$, o $x - m = 0$ l'equazione dell'asse dell'omologia prodotto. Perchè la (2) rappresenti un cerchio, si deve avere:

$$\mu^2 = \lambda^2 - k\,, \quad \text{d'onde} \quad k = \lambda^2 - \mu^2 \tag{4}$$

ed, analogamente, perchè sia un cerchio la (3) si deve avere:

$$\mu^2 - k = \lambda^2\,, \quad \text{d'onde} \quad k = \mu^2 - \lambda^2. \tag{5}$$

Nel primo caso, l'ordinata $CO' = \eta$ del centro del cerchio rappresentato dalla (2) ed il raggio $i\zeta$ $(i = \sqrt{-1})$ sono rispettivamente dati dalle formole

$$\eta = -\frac{k}{\mu^2} m\,, \quad -\zeta^2 = \eta^2 - \lambda^2 + \frac{k}{\mu^2} m^2 = \eta^2 - \lambda^2 - \eta m\,;$$

[1] *Elementi di statica.* Parte prima, pag. 59, cap. V. Padova, 1872. Le focali di Minding sono chiamate dal Turazza *coniche mediane.*

per cui, eliminando m, si ha fra η e ζ la relazione

$$(6)\qquad \frac{\eta^2}{\lambda^2-\mu^2}+\frac{\zeta^2}{\lambda^2}-1=0\,.$$

Nel secondo caso, l'ordinata $CO'=\xi$ del centro del cerchio rappresentato dalla (3) ed il raggio $i\zeta$ ($i=\sqrt{-1}$), sono, rispettivamente, dati dalle formole

$$\xi=-\frac{k}{\lambda^2}m\;,\;-\zeta^2=\xi^2-\mu^2+\frac{k}{\lambda^2}m^2=\xi^2-\mu^2-\xi m\,;$$

per cui, eliminando m, si ha fra ξ e ζ la relazione

$$(7)\qquad \frac{\xi^2}{\mu^2-\lambda^2}+\frac{\zeta^2}{\mu^2}-1=0\,.$$

Conducendo i due piani mediani α, β (supp. che α passi per λ, e quindi β per μ), rispetto alla retta $\alpha\beta$ debitamente orientata, come asse delle z, ed agli assi delle x e delle y, sono $(0\,,\eta\,,\zeta)$ le coordinate di O nel primo caso, e $(\xi\,,0\,,\zeta)$ le coordinate di O nel secondo. Il punto O appartiene dunque alla conica (6) o alla conica (7); le quali sono, evidentemente, l'una ellisse, l'altra iperbole mutuamente focali e focali entrambe alla conica centrale: sono appunto le *focali di Minding*.

3. Per vedere ora come sono distribuite intorno ad un punto O dell'una, o dell'altra, delle due focali, le varie posizioni di equilibrio del corpo, e come si passa a queste da una posizione generica del corpo stesso, conservando le notazioni precedenti, si dicano E ed e rispettivamente il centro e l'asse dell'omologia $\Theta=\Pi\Gamma$ relativa alla posizione scelta del punto O; indi, per mezzo della omografia Ω definita come nel n. 15 della mia citata Nota *Sulle quattro rotazioni* ecc. si cerchino gli elementi E', e' corrispondenti di E, e.

Ad ogni triangolo auto-coniugato comune EF_iG_i rispetto ai sistemi polari Π, Γ, epperò tale che il triedro $O(EF_iG_i)$ è trirettangolo, corrisponde in Ω un triangolo $E'F_i'G_i'$ auto-coniugato rispetto a Π, epperò tale che è pure trirettangolo il triedro $O(E'F_i'G_i')$ e sono di esso uno spigolo e la faccia opposta la retta OE' ed il piano Oe'. Per mezzo di quattro rotazioni Ω_1, ... Ω_4 individuate come al n. 1 della suddetta Nota (cfr. pure il n. 14), si porta il triedro $O(EF_iG_i)$ sul triedro $O(E'F_i'G_i')$ e le quattro corrispondenti posizioni che assume il corpo cui si suppone attaccato il triedro mobile, sono posizioni di equilibrio. Diciamo S_1, ... S_4 queste posizioni, e rammentiamo che da una di esse si passa alle altre tre facendo seguire quella prima dalle rotazioni di 180° (E'), (F_i'), (G_i') intorno ad OE', OF_i', OG_i'.

Se al triangolo EF_iG_i si dà un'altra posizione EF_kG_k, e si dice $E'F_k'G_k'$ la posizione corrispondente di $E'F_i'G_i'$, altre 4 rotazioni Σ_1, ..., Σ_4 condurranno il corpo in altre 4 posizioni di equilibrio $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_4$, e pure queste sono tali che da una di esse si deducono le altre tre facendo seguire quella prima dalle rotazioni di 180° intorno ad OE', OF'_k, OG'_k.

Vogliamo ora vedere in qual modo si può passare dalle $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_4$ alle $S_1, \ldots, S_4$. Si dica $E'F''_iG''_i$ il triangolo che corrisponde in Σ_h al triangolo OE_iF_i (1) cioè sia $O(E'F''_iG''_i)$ il triedro sul quale si dispone $O(EF_iG_i)$ dopo della rotazione Σ_h; si potrà allora condurre il triedro $O(E'F''_iG''_i)$ sul triedro $O(E'F'_iG'_i)$ per mezzo di quattro rotazioni $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_4$; due delle quali $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ lasciano invariato OE' in posizione e verso, e le altre due sovrappongono OE' a se stesso cambiando un verso nell'opposto (cfr. n. 1 e n. 11 della cit. Nota). Le $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ hanno, così, per asse OE', mentre le altre due sono rotazioni di 180° con gli assi nel piano Oe'. Coi prodotti di Σ_h per le $\mathcal{H}$, i quali prodotti sono pure rotazioni, si porta il triedro $O(EF_iG_i)$ sul triedro $O(E'F'_iG'_i)$, cioè si porta il corpo dalla posizione attuale nelle posizioni di equilibrio $S_1, \ldots, S_4$. Si può dunque scrivere

$$\Omega_1 \equiv \Sigma_h\mathcal{H}_1\ ,\quad \Omega_2 \equiv \Sigma_h\mathcal{H}_2\ ,\quad \Omega_3 \equiv \Sigma_h\mathcal{H}_3\ ,\quad \Omega_4 \equiv \Sigma_4\mathcal{H}_4\ ,$$

e concluderne che $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_4$ portano il corpo dalla posizione di equilibrio $\mathfrak{S}_h$ alle posizioni $S_1, \ldots, S_4$.

Gli angoli delle $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ differiscono di 180°, sicchè detto θ quello di $\mathcal{H}_1$, è $\theta + 180°$ quello di $\mathcal{H}_2$. Scegliendo convenientemente il triangolo EF_kG_k si può fare in modo che θ diventi piccolo come si vuole, o che l'asse di una delle rotazioni $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$ diventi una retta arbitraria del piano Oe'. Ne concludiamo che le posizioni di equilibrio del corpo intorno al punto O si distribuiscono per quaterne in modo che, mentre da una posizione di una stessa quaterna si passa alle altre tre facendo rotare il corpo di 180° intorno agli spigoli di un triedro trirettangolo di cui OE' è uno spigolo fisso, da una posizione di una determinata quaterna si passa sempre ad un'altra di un'altra quaterna facendo rotare il corpo di un angolo arbitrario attorno ad OE', o pure di un angolo di 180° intorno ad una retta del piano Oe'. In altri termini, *i soli spostamenti capaci di condurre il corpo da una posizione di equilibrio, intorno ad* O, *ad una posizione pure di equilibrio sono le rotazioni di qualunque angolo attorno ad* OE', *e le rotazioni di 180° attorno alle rette del piano* OE'; *epperò, una posizione qualunque di equilibrio del corpo, intorno ad* O, *è posizione d'equilibrio indifferente soltanto per le rotazioni intorno ad* OE'. Queste conclusioni ed il fatto che i ragionamenti precedenti sono indipendenti dall'essere O sull'una o sull'altra delle due focali, mostrano in qual senso la seconda parte dell'enunciato dato dal prof. Segre, relativamente a questa questione, dovrebbe essere rettificata.

(1) Con Σ_k è qui intesa, come nella Nota cit. cui ci siamo riferiti, tanto la rotazione nello spazio, quanto la sua immagine prospettica.