# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XIV.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del* 19 *novembre* 1905.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE

### DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sui gruppi continui di movimenti rigidi negli iperspazii.* Nota del Socio G. Ricci.

In una Nota pubblicata l'anno scorso negli Atti del R. Istituto Veneto ho esteso ad una varietà qualunque i concetti di *direzioni* e di *invarianti principali* già stabiliti per gli spazii a tre dimensioni. Importa ora di osservare ed è facile riconoscere che le espressioni $\gamma_{hi,kl}$ relative alla ennupla principale e legate fra loro dalle relazioni (7) della Nota citata, dànno il sistema completo degli invarianti algebrici comuni alla forma quadratica fondamentale ed a quella quadrilineare avente per coefficienti i simboli di Riemann e forniscono quindi tutto quanto è necessario per la espressione degli elementi e delle proprietà invariantive di 2° ordine dello spazio considerato.

Mentre ogni $\gamma_{hk,hk}$ rappresenta la curvatura della superficie geodetica, la cui giacitura è determinata in $V_n$ dalle direzioni delle linee $[h]$ e $[k]$, più riposto appare il significato geometrico degli invarianti $\gamma_{hi,kj}$, che hanno almeno tre indici distinti. Senza occuparmi per ora di tale interpretazione geometrica, nel presente scritto mi propongo di estendere ad una $V_n$ qualunque alcuni dei risultati fondamentali, a cui sono giunto per le $V_3$ nella mia Memoria: *Sui gruppi continui di movimenti* ecc., pubblicata nel t. XII della serie 3ª delle *Memorie della Società italiana delle Scienze.*

Le equazioni del problema dei gruppi di movimenti rigidi in una $V_n$ qualunque acquistano, come vedremo, una notevole semplicità per quelle $V_n$, le quali ammettono una ennupla principale dotata della proprietà che per essa sono identicamente nulle tutte le $\gamma_{hi,kj}$, che hanno almeno tre indici distinti. Per queste varietà, che chiameremo *regolari*, gli invarianti differenziali di 2° ordine si riducono alle sole curvature $\gamma_{hk,hk}$. Avvertiamo che, come risulta dalla Nota più volte citata, sono varietà regolari le ipersuperficie e più in generale tutte le $V_n$, per le quali i simboli di Riemann possono mettersi sotto la forma di minori di 2° ordine di un determinante simmetrico di ordine $n$.

1. Siano

$$\varphi = \sum_1^n {}_r\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la forma differenziale quadratica, che definisce la metrica di una $V_n$ ed

$$X(f) = \sum_1^n \xi^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

una trasformazione infinitesima corrispondente ad un movimento rigido nella varietà stessa. Le equazioni fondamentali di Killing, assunta come forma fondamentale $\varphi$, si scrivono colle notazioni del calcolo differenziale assoluto come segue:

$$(\alpha) \qquad \xi_{rs} + \xi_{sr} = 0 .$$

Si assuma una ennupla fondamentale $[1], [2], \ldots, [n]$, le cui congruenze abbiano i sistemi coordinati covarianti $\lambda_{h|r}$, e si designino con $\gamma_{ihk}$ i suoi coefficienti di rotazione, cioè si facciano le posizioni

$$(1) \qquad \lambda_{i|rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h|r}\, \lambda_{k|s} ;$$

ponendo altresì le

$$(2) \qquad \xi_r = \sum_1^n {}_i\, \eta_i\, \lambda_{i|r} .$$

Se si derivano le

$$\eta_i = \sum_1^n \xi^{(r)}\, \lambda_{i|r}$$

equivalenti alle (2) e si tien conto delle (1) e delle $(\alpha)$ si riconosce facilmente che alle $(\alpha)$ stesse equivalgono le

$$(\alpha_1) \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial s_j} = \sum_1^n {}_l\, \gamma_i\, l_j\, \eta_l + \delta_{ij} ,$$

nelle quali le $\delta_{ij}$ rappresentano delle indeterminate legate dalle relazioni

$$\delta_{ij} + \delta_{ji} = 0 .$$

Esse hanno nel caso generale il significato, che le rotazioni hanno nel caso di $n = 3$.

2. Dalle $(\alpha_1)$ si traggono per derivazione le

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial \eta_i}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial \eta_i}{\partial s_k} = \sum_1^n{}_l\, \gamma_{il,hk}\, \eta_l$$
$$+ \sum_1^n{}_{gl} (\gamma_{ghk} - \gamma_{ghh})\, \gamma_{lig}\, \eta_l + \frac{\partial \delta_{ih}}{\partial s_k} - \frac{\partial \delta_{ik}}{\partial s_h}$$
$$+ \sum_1^n{}_g (\gamma_{ghk} - \gamma_{gkh})\, \gamma_{lig}\, \eta_l + \sum_1^n{}_g (\gamma_{igh}\, \delta_{gk} - \gamma_{igk}\, \delta_{gh}) ;$$

le quali confrontate colle note formole di inversione della derivazione intrinseca dànno le

$$\frac{\partial \delta_{ih}}{\partial s_k} - \frac{\partial \delta_{ik}}{\partial s_h} = \sum_1^n{}_l\, \gamma_{li,hk}\, \eta_l + \sum{}_l (\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk})\, \delta_{il} + \sum_1^n{}_l (\gamma_{lih}\, \delta_{lk} - \gamma_{lik}\, \delta_{lh}) ;$$

o le equivalenti

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \delta_{ih}}{\partial s_k} = \sum_1^n{}_l\, \gamma_{lk,hi}\, \eta_l + \sum_1^n{}_l (\gamma_{lik}\, \delta_{hl} - \gamma_{lhk}\, \delta_{il}) .$$

Se si fanno le posizioni

$$\gamma_{ij,hkl} = \frac{\partial \gamma_{ij,hk}}{\partial s_l} + \sum_1^n{}_g (\gamma_{gil}\, \gamma_{gj,hk} + \gamma_{gjl}\, \gamma_{ig,hk} + \gamma_{ghl}\, \gamma_{gij,gk} + \gamma_{gkl}\, \gamma_{ij,hg}) ,$$

valgono le

$$\gamma_{ij,hkl} = \sum_1^n{}_{rstuv}\, a_{rs,tuv}\, l_i^{(r)}\, l_j^{(s)}\, l_h^{(t)}\, l_k^{(u)}\, l_l^{(v)} ,$$

e perciò le relazioni identiche

$$a_{rs,tuv} + a_{rs,vtu} + a_{rs,uvt} = 0$$

riconosciute dal prof. Bianchi si possono anche scrivere sotto forma invariantiva come segue:

$$\gamma_{ij,hkl} + \gamma_{ij,lhk} + \gamma_{ij,klh} = 0 .$$

Se, tenendo conto di queste, si applica alle $(\beta)$ il procedimento di derivazione ed eliminazione già applicato alle $(\alpha_1)$ si giunge in fine alle

$$(\gamma) \qquad \sum_1^n{}_l \{\gamma_{ij,hkl}\, \eta_l + \gamma_{lh,ji}\, \delta_{lk} - \gamma_{lk,ji}\, \delta_{lh} + \gamma_{lj,hk}\, \delta_{li} - \gamma_{li,hk}\, \delta_{lj}\} = 0 .$$

Le equazioni ($\alpha$), ($\beta$) e ($\gamma$) costituiscono il sistema algebrico-differenziale simultaneo, cui debbono soddisfare le funzioni incognite del problema, cioè le traslazioni e le rotazioni.

3. Giova distinguere le equazioni ($\gamma$) in tre gruppi A, B, C secondo che degli indici $i, j, h, k$ due, tre o tutti sono distinti; ed assumere come ennupla di riferimento una ennupla principale.

Se si indicano con $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ gli invarianti principali di $V_n$, le equazioni del gruppo A opportunamente combinate fra di loro e quelle del gruppo B in modo analogo danno rispettivamente le

$$(A_0) \qquad \sum_1^n{}_l\, \eta_l \frac{\partial \varrho_i}{\partial s_l} = 0$$

$$(B_0) \qquad (\varrho_k - \varrho_h)\left(\sum_1^n{}_l\, \gamma_{hkl}\, \eta_l + \delta_{hk}\right) = 0\,.$$

Se si suppongono gli invarianti principali tutti fra loro distinti, le ($B_0$) dànno per le $\delta_{hk}$ le espressioni

$$(3) \qquad \delta_{hk} = \sum_1^n{}_l\, \gamma_{khl}\, \eta_l\,,$$

per le quali le ($\alpha$), ($\beta$) e ($\gamma$) assumono rispettivamente la forma

$$(\alpha') \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial s_j} = \sum_1^n (\gamma_{ilj} - \gamma_{ijl})\, \eta_l$$

$$(\beta') \qquad \frac{\partial \delta_{ih}}{\partial s_k} = \sum_1^n{}_l \left\{\gamma_{ik,hl} + \sum_1^n{}_g (\gamma_{gik}\, \gamma_{ghl} - \gamma_{ghk}\, \gamma_{gil})\right\} \eta_l$$

$$(\gamma') \qquad \sum_1^n{}_l\, \eta_l \frac{\partial \gamma_{ij,hk}}{\partial s_l} = 0\,.$$

Se colle ($\beta'$) si confrontano quelle, che si ottengono derivando le (3) ed eliminando le derivate delle $\eta$ mediante le ($\alpha'$) si giunge alle

$$(a) \qquad \sum_1^n{}_l\, \eta_l \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_l} = 0\,.$$

Se si osserva che, quando le ($a$) sono identicamente soddisfatte, lo sono anche le ($\gamma'$) si può dunque concludere che:

« Ogni $V_n$, i cui invarianti principali siano tutti distinti, ammette un gruppo transitivo di movimenti rigidi, se le rotazioni relative alla ennupla principale sono costanti e solamente in questo caso. Verificate queste condi-

zioni, la $V_n$ ammette un gruppo ad $n$ parametri, pei quali risultano arbitrarii i valori iniziali delle traslazioni.

« Assunta poi come ennupla di riferimento la ennupla principale di $V_n$ mentre le traslazioni si determinano integrando il sistema $(\alpha')$, le rotazioni si ottengono dalle (3) in funzione delle traslazioni ».

Dalle $(\alpha')$ si trae poi che:

« Se le congruenze principali sono normali, la componente della traslazione secondo una determinata direzione principale varia soltanto lungo questa ».

Infine dalle $(A_0)$ segue che:

1°. « Se una $V_n$ ammette un gruppo G di movimenti rigidi, gli invarianti principali di $V_n$ sono invarianti rispetto al gruppo ».

2°. « Se il gruppo è transitivo, i detti invarianti principali sono costanti ».

4. Assunta come ennupla di riferimento una ennupla principale, le equazioni del gruppo C sono identicamente soddisfatte, se la varietà $V_n$ è regolare ed in questo caso soltanto. Le equazioni dei gruppi A e B assumono allora rispettivamente le forme

$$(A_1) \qquad \sum_1^n {}_l\, \eta_l \frac{\partial \gamma_{ij,ij}}{\partial s_l} = 0$$

$$(B_1) \qquad (\gamma_{ij,ij} - \gamma_{ik,ik}) \left( \sum_1^n {}_l\, \gamma_{jkl}\, \eta_l + \delta_{jk} \right) = 0\,;$$

e sostituiscono complelamente il gruppo $(\gamma)$.

Esse sono identicamente soddisfatte per le varietà a curvatura costante e soltanto per esse, e si ottiene così il ben noto teorema sul gruppo dei movimenti rigidi, che ad esse appartengono.

Le $(A_1)$ ci dicono che:

« Se una varietà regolare $V_n$ ammette un gruppo di movimenti rigidi G, gli invarianti differenziali di 2° ordine di $V_n$ sono tutti invarianti rispetto a G ».

« Se il gruppo è transitivo, tali invarianti sono costanti ».

È facile caratterizzare geometricamente il caso in cui le $(B_1)$ determinano le $\delta_{jk}$ in funzione delle $\eta_l$ dando per esse le espressioni (3). In tal caso valgono ancora e si ottengono, come nel paragrafo precedente, le $(\alpha')$, $(\beta')$ ed $(a)$, e valgono quindi anche per il caso, che ora consideriamo, le conclusioni che da esse abbiamo sopra ricavate.