ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Fisiologia. — *Contributo alla fisiologia dei muscoli lisci.* Memoria del Socio A. Mosso.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme.* Nota di Giovanni Z. Giambelli, presentata dal Socio C. Segre.

Come ho accennato nella mia Memoria: *Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme* « Mem. R. Ist. Lomb. » (3), 11, 1904 (1), i risultati in essa ottenuti per mezzo di semplici trasformazioni analitiche e geometriche possono fornire notevoli proposizioni di geometria. Nei § 1, 2 del seguente lavoro si dimostreranno alcuni nuovi teoremi generali di geometria analitica sulle varietà algebriche; nei § seguenti si esporranno i nuovi risultati che si deducono associando questi teoremi di geometria analitica a quelli della mia Memoria, applicando implicitamente alcune semplici proposizioni geometriche. Nel § 4 ho creduto opportuno farne delle applicazioni alle varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme per mostrare che lo studio di questo lavoro, di altri precedenti e di altri che pubblicherò in seguito, si debba considerare come un proseguimento nell'indirizzo di ricerche iniziate dal Cremona negli ultimi cinque capitoli della sua classica Memoria: *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, « Mem. dell'Acc. delle scienze di Bologna », (2), 7, 1867.

(1) Mi pare opportuno ricordare che nelle due lettere inviate da L. Schäfli, il 23 aprile 1854 ed il 27 maggio 1854, a I. Steiner [cfr. *Der Briefwechsel zwischen I. Steiner und L. Schäfli* herausg. von I. H. Graf, Berna, 1896] si fa un cenno su queste varietà rappresentate per mezzo di matrici.

Alcuni teoremi sulle dette varietà, che si collegano con quelli dei § 2, 3 della mia Memoria, si trovano nei due importanti lavori del prof. A. Brill: *Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen*, « Math. Ann. », 5, 1872. — *Ueber algebraische Korrespondenzen*, « Math. Ann. », 36, 1890.

La verifica poi accennata alla fine della mia Memoria (ultima nota della pag. 133 [33]) si può estendere ulteriormente, perchè il genere della curva C_1 (ivi considerata) coincide con una formola del sig. Stuyvaert (dedotta in modo affatto indipendente dai risultati di quella Memoria) comunicatami, quando aveva appena ricevuto gli estratti della mia Memoria.

1. Definizione del simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ e proprietà elementari relative. — Una formola di geometria analitica sopra i polinomii di forme.

Indicando per brevità con $\Delta_{(y;z)}$ l'espressione simbolica (operazione di polare) $\sum_{i=0}^{i=d} y_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, si definirà

$$\nabla_r^{(y;z)} = \frac{1}{r!}\left[\Delta_{(y;z)}\right]^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Evidentemente $\nabla_0^{(y;z)}$ è un simbolo che non eseguisce alcuna operazione; cioè, se a è una forma (anche di ordine zero, cioè una costante) nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, vale: $\nabla_0^{(y;z)} a = a$.

Rispetto a questo simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ è opportuno enunciare le seguenti proprietà fondamentali:

1ª. Essendo $a_0, a_1, \ldots, a_l$ forme nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, vale la relazione:

$$\nabla_r^{(y;z)}(a_0 a_1 \ldots a_l) = \sum_i \nabla_{i_0}^{(y;z)} a_0 \cdot \nabla_{i_1}^{(y;z)} a_1 \ldots \nabla_{i_l}^{(y;z)} a_l,$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i valori interi positivi zero incluso delle i, la cui somma è uguale ad r.

2ª. Essendo $a_0, a_1, \ldots, a_l$ forme nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, vale la relazione:

$$\nabla_r^{(y;z)}(a_0 + a_1 + \cdots + a_l) = \nabla_r^{(y;z)} a_0 + \nabla_r^{(y;z)} a_1 + \cdots + \nabla_r^{(y;z)} a_l.$$

3ª. Si consideri l'ipersuperficie [1] $a = 0$, essendo a una forma nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, coordinate omogenee di punto in uno spazio $[d]$. Se si designano pure con $z_0, z_1, \ldots, z_d$ le coordinate di un punto Z r^{plo} per l'ipersuperficie $a = 0$, allora $\nabla_i^{(y;z)} a$ è identicamente nulla quando $i = 0, 1, \ldots, r - 1$; ed interpretando $y_0, y_1, \ldots, y_d$ come coordinate omogenee correnti di punto nello spazio $[d]$, $\nabla_r^{(y;z)} a = 0$ rappresenta l'equazione del cono di ordine r tangente all'ipersuperficie nel punto Z.

Dalle proprietà elementari ora esposte segue subito:

TEOREMA I. — *Si considerino le ipersuperficie $a_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, l)$, essendo a_i una forma di ordine m_i nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, coordinate omo-*

(1) Siccome qui occorre distinguere la concezione della forma a, colla concezione della totalità dei suoi zeri, si adopera la parola *ipersuperficie* invece di *forma*, come si suol fare. Nel seguito del lavoro non si avvertirà, dove occorra tener conto di questa osservazione molto ovvia.

genee di punto nello spazio $[d]$; *l'ipersuperficie* $a_i = 0$ *abbia poi nel punto* Z *la molteplicità* ϱ_i, *essendo* $\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_l$ *numeri interi positivi zero incluso* (¹). *Si designi con* $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_l) = \sum C_{i_0 i_1 \dots i_l} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \dots a_l^{i_l}$ *un polinomio nelle* $a_0, a_1, \dots, a_l$ ($C_{i_0 i_1 \dots i_l}$ *sono coefficienti*), *dove nella sommatoria* $i_0, i_1, \dots, i_l$ *variano in modo che le somme* $m_0 i_0 + m_1 i_1 + + \dots + m_l i_l$, $\varrho_0 i_0 + \varrho_1 i_1 + \dots + \varrho_l i_l$ *non mutano al variare delle* $i_0, i_1, \dots, i_l$, *per cui si può chiamare* m *il valore comune alle somme* $m_0 i_0 + m_1 i_1 + \dots + m_l i_l$ *e chiamare* ϱ *il valore comune alle somme* $\varrho_0 i_0 + \varrho_1 i_1 + \dots + \varrho_l i_l$. *Indicando pure con* $z_0, z_1, \dots, z_d$ *le coordinate del punto* Z *e interpretando* $y_0, y_1, \dots, y_d$ *come coordinate omogenee correnti di punto nello spazio* $[d]$, *l'equazione*

$$\Phi(\nabla_{\varrho_0}^{(y;z)} a_0, \nabla_{\varrho_1}^{(y;z)} a_1, \dots, \nabla_{\varrho_l}^{(y;z)} a_l) = 0,$$

ossia l'equazione

$$\sum C_{i_0 i_1 \dots i_l} (\nabla_{\varrho_0}^{(y;z)} a_0)^{i_0} (\nabla_{\varrho_1}^{(y;z)} a_1)^{i_1} \dots (\nabla_{\varrho_l}^{(y;z)} a_l)^{i_l} = 0,$$

quando non è identicamente nulla, rappresenta il cono di ordine ϱ *tangente nel punto* ϱ^{uplo} Z *all'ipersuperficie* $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_l) = 0$ *di ordine* m.

2. Lemma sulle matrici. — Una formola di geometria analitica sulle varietà rappresentate coll'annullare una matrice di forme.

Lemma. — *Detto* $M(i_0, i_1, \dots, i_r; k_0, k_1, \dots, k_r)$ *il minore di* $(r+1)^{\text{simo}}$ *ordine della matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n)$ *costituito dalle linee* $(i_0+1)^{\text{sima}}, (i_1+1)^{\text{sima}}, \dots, (i_r+1)^{\text{sima}}$, *e dalle colonne* $(k_0+1)^{\text{sima}}, (k_1+1)^{\text{sima}}, \dots, (k_r+1)^{\text{sima}}$, *se sono nulli tutti i minori di ordine* $r+2$ *contenuti in questa matrice* $\|a_{ik}\|$, *allora vale:*

$$\frac{M(i_0, i_1, \dots, i_r; k_0, k_1, \dots, k_r)}{M(i_0, i_1, \dots, i_r; k'_0, k'_1, \dots, k'_r)} = \frac{M(i'_0, i'_1, \dots, i'_r; k_0, k_1, \dots, k_r)}{M(i'_0, i'_1, \dots, i'_r; k'_0, k'_1, \dots, k'_r)},$$

dove $i'_0, i'_1, \dots, i'_r$ *sono* $r+1$ *numeri tra loro distinti presi nella serie* $0, 1, \dots, m$ *e dove* $k'_0, k'_1, \dots, k'_r$ *sono* $r+1$ *numeri tra loro distinti presi nella serie* $0, 1, \dots n$.

Si omette la dimostrazione di questo lemma, perchè essa si può ottenere immediatamente applicando notissimi teoremi di algebra.

(¹) Evidentemente $\varrho_i = 0$ significa che l'ipersuperficie $a_i = 0$ non passa pel punto Z. Reputo superfluo ripetere tale osservazione nei seguenti casi analoghi di questo lavoro.

Indichiamo ora con $\|A\|$ la matrice generica di forme [1] nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$ definita da $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m\,;\ k = 0, 1, \ldots, n\,;\ n \geq m)$, con $\|\nabla^{(y;z)} A\|$ la matrice ottenuta dalla $\|A\|$ ponendo $\nabla_1^{(y;z)} a_{ik}$ in luogo di ciascuna delle forme a_{ik} $(i = 0, 1, \ldots, m\,;\ k = 0, 1, \ldots, n)$. Con

$$M(i_0, i_1, \ldots, i_r\,;\ k_0, k_1, \ldots, k_r\,;\ \|A\|)$$

si designerà il minore di ordine $r+1$ $(0 \leq r \leq m)$ costituito dalle linee $(i_0+1)^{sima}, (i_1+1)^{sima}, \ldots, (i_r+1)^{sima}$ e dalle colonne $(k_0+1)^{sima}$, $(k_1+1)^{sima}, \ldots, (k_r+1)^{sima}$ della matrice $\|A\|$; similmente con

$$M(i_0, i_1, \ldots, i_r\,;\ k_0, k_1, \ldots, k_r\,;\ \|\nabla^{(y;z)} A\|)$$

si designerà il minore di ordine $r+1$ $(0 \leq r \leq m)$ costituito dalle linee $(i_0+1)^{sima}, (i_1+1)^{sima}, \ldots, (i_r+1)^{sima}$ e dalle colonne $(k_0+1)^{sima}$, $(k_1+1)^{sima}, \ldots, (k_r+1)^{sima}$ della matrice $\|\nabla^{(y;z)} A\|$. Indicheremo invece con

$$N(i_0, i_1, \ldots, i_r\,;\ k_0, k_1, \ldots, k_{n-m+r}\,;\ \|A\|)$$

il minore di ordine $m-r$ $(0 \leq r \leq m-1)$ ottenuto dalla matrice $\|A\|$ togliendo le linee $(i_0+1)^{sima}, (i_1+1)^{sima}, \ldots, (i_r+1)^{sima}$ e le colonne $(k_0+1)^{sima}, (k_1+1)^{sima}, \ldots, (k_{n-m+r}+1)^{sima}$; e si rappresenterà con

$$D_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}$$

il determinante di ordine $m+1$, ottenuto dalla matrice $\|A\|$ togliendo le colonne $(j_1+1)^{sima}, (j_2+1)^{sima}, \ldots, (j_{n-m}+1)^{sima}$.

Interpretando le $z_0, z_1, \ldots, z_d$ come coordinate omogenee di punto nello spazio $[d]$, si designi per ora con $F_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}$ l'ipersuperficie di equazione

$$D_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}} = 0$$

e con W_{r+1} $(0 \leq r \leq m)$ la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $m-r+1$ contenuti nella matrice $\|A\|$. Essendo Z un punto generico di W_{m-r}, conveniamo d'indicare pure con $z_0, z_1, \ldots, z_d$ le coordinate di questo punto Z. Quindi se si pensano invece come coordinate omogenee correnti di punto le $y_0, y_1, \ldots, y_d$, in virtù di quanto si è detto sul simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ nel § precedente, l'ipersuperficie $F_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}$ nel punto generico Z ammetterà come cono tangente l'ipersuperficie di equazione

$$\begin{aligned}(2)\qquad & \sum \pm M(i_0, i_1, \ldots, i_r\,;\ k_0, k_1, \ldots, k_r\,;\ \|\nabla^{(y;z)} A\|)\,\cdot \\ & \cdot\, N(i_0, i_1, \ldots, i_r\,;\ j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}, k_0, k_1, \ldots, k_r\,;\ \|A\|) = 0,\end{aligned}$$

[1] Brevemente si può dire che la matrice è generica, quando i coefficienti delle forme sono lettere assoggettate a nessuna equazione, cioè del tutto tra loro indipendenti; cfr. poi il § 4 della mia citata Memoria.

dove nel primo membro la sommatoria è estesa a tutti i valori delle $i_0, i_1, \ldots, i_r$ e delle $k_0, k_1, \ldots, k_r$ per cui

1° $i_0 < i_1 < \cdots < i_{r-1} < i_r$, $k_0 < k_1 < \cdots < k_{r-1} < k_r$;

2° $i_0, i_1, \ldots, i_r$ è una disposizione di $r+1$ numeri della serie $0, 1, \ldots, m$; $k_0, k_1, \ldots, k_r$ è una disposizione di $r+1$ numeri della serie di $m+1$ numeri, che si ottiene dalla serie $0, 1, \ldots, n$ togliendo $j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}$; il segno poi sarà $+$, oppure $-$, secondochè è di classe pari, oppure dispari, il minore

$$N(i_0, i_1, \ldots, i_r \,;\, j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}, k_0, k_1, \ldots, k_r \,;\, \|A\|)$$

pensato come appartenente al determinante $D_{j_1 j_2 \ldots j_{n-m}}$.

Osserviamo che per il lemma precedente vale:

$$\begin{aligned} &N(i_0, i_1, \ldots, i_r \,;\, j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}, k_0, k_1, \ldots, k_r \,;\, \|A\|) = \\ (3) \qquad &= N(0, 1, \ldots, r \,;\, j_1, j_2, \ldots, j_{n-m}, k_0, k_1, \ldots, k_r \,;\, \|A\|) \cdot \\ &\cdot \frac{N(i_0, i_1, \ldots, i_r \,;\, m-r, m-r+1, \ldots, n \,;\, \|A\|)}{N(0, 1, \ldots, r \,;\, m-r, m-r+1, \ldots, n \,;\, \|A\|)} . \end{aligned}$$

Siccome Z è un punto generico di W_{r+1} non possono essere tutti nulli i determinanti di ordine $m-r$ contenuti nella matrice $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m;$ $k = 0, 1, \ldots, m-r-1)$, quando ben inteso si pensino le $z_0, z_1, \ldots, z_d$ come coordinate del punto generico Z; quindi pensando sempre le $z_0, z_1, \ldots, z_d$ come coordinate di Z, il sistema di equazioni (nelle incognite omogenee x).

$$a_{0u} x_0 + a_{1u} x_1 + \cdots + a_{mu} x_m = 0 \qquad (u = 0, 1, \ldots, m-r-1)$$

ammetterà ∞^r soluzioni; perciò si potrà scegliere un sistema

$$b_{u0}, b_{u1}, \ldots, b_{um} \qquad (u = 0, 1, \ldots, r)$$

di $r+1$ soluzioni linearmente indipendenti. Per un noto teorema del prof. E. D'Ovidio [1] segue:

$$N(i_0, i_1, \ldots, i_r \,;\, m-r, m-r+1, \ldots, n \,;\, \|A\|) =$$

$$= \sigma \cdot (-1)^{i_0+i_1+\cdots+i_r} \cdot \begin{vmatrix} b_{0,i_0} & b_{0,i_1} & \ldots & b_{0,i_r} \\ b_{1,i_0} & b_{1,i_1} & \ldots & b_{1,i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r,i_0} & b_{r,i_1} & \ldots & b_{r,i_r} \end{vmatrix} ,$$

[1] Cfr. il teorema del § II delle *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*, « Atti della R. Acc. delle scienze di Torino », 12, 1877.

dove con σ si rappresenta un fattore di proporzionalità, che rimane costante al variare delle $i_0, i_1, \dots, i_r$.

Questa formola associata alla (3) permette di scrivere la (2) così:

$$\sum_k \pm \Big\{ \sum_i \mathrm{M}(i_0, i_1, \dots, i_r \; ; \; k_0, k_1, \dots, k_r \; ; \; \|\nabla^{(y;z)}\mathrm{A}\|) \cdot \left| \begin{matrix} b_{0,i_0} & \dots & b_{0,i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r,i_0} & \dots & b_{r,i_r} \end{matrix} \right| \Big\} \cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{N}(0, 1, \dots, r \; ; \; j_1, j_2, \dots, j_{n-m}, k_0, k_1, \dots, k_r \; ; \; \|\mathrm{A}\|) = 0,$$

dove la sommatoria $\sum_i$ è estesa a tutti i valori delle $i_0, i_1, \dots, i_r$ per cui $i_0 < i_1 < \dots < i_{r-1} < i_r$, essendo $i_0, i_1, \dots, i_r$ una disposizione di $r+1$ numeri della serie $0, 1, \dots, m$, e dove la sommatoria $\sum_k$ è estesa a tutti i valori delle $k_0, k_1, \dots, k_r$ per cui $k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1} < k_r$, essendo $k_0, k_1, \dots, k_r$ una disposizione di $r+1$ numeri della serie di $m+1$ numeri, che si ottiene dalla serie $0, 1, \dots, n$ togliendo $j_1, j_2, \dots, j_{n-m}$; inoltre il segno è $+$, oppure $-$, secondochè è di classe pari oppure dispari, il minore

$$\mathrm{N}(0, 1, \dots, r \; ; \; j_1, j_2, \dots, j_{n-m}, k_0, k_1, \dots, k_r \; ; \; \|\mathrm{A}\|)$$

pensato come appartenente al determinante $\mathrm{D}_{j_1 j_2 \dots j_{n-m}}$.

Scrivendo in modo opportuno l'espressione del primo membro della formola precedente contenuta tra le $\}\{$, per mezzo del teorema sul prodotto di due matrici rettangolari, essa diventa uguale al determinante di ordine $r+1$

$$|b_{u0} \nabla_1^{(y;z)} a_{0v} + b_{u1} \nabla_1^{(y;z)} a_{1v} + \dots + b_{um} \nabla_1^{(y;z)} a_{mv}|$$

$$(u = 0, 1, \dots, r \; ; \; v = k_0, k_1, \dots, k_r).$$

Quindi il primo membro dell'equazione (2) non è altro che il determinante $\mathrm{D}_{j_1 j_2 \dots j_{n-m}}$, quando in luogo di ciascun elemento a_{ik} $(i = 0, 1, \dots, r;$ $k = 0, 1, \dots, n)$ appartenente alle prime $r+1$ linee si ponga l'espressione

$$b_{i0} \nabla_1^{(y;z)} a_{0k} + b_{i1} \nabla_1^{(y;z)} a_{1k} + \dots + b_{im} \nabla_1^{(y;z)} a_{mk},$$

pensando ben inteso le $z_0, z_1, \dots, z_d$ come coordinate di Z.

Dal risultato ottenuto, per mezzo di alcune ovvie osservazioni e ponendo mente p. es. al teorema del § 6 della mia citata Memoria, possiamo facilmente enunciare:

Teorema II. — *La varietà* W_1 *rappresentata coll'annullare la matrice generica* $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m\ ;\ k = 0, 1, \ldots, n\ ;\ n \geq m)$, *in cui le* a_{ik} *sono forme nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio* $[d]$, *quando è* $d \geq (r+1)(n-m+r+1)$ $(0 \leq r \leq m)$ *ammette una varietà* W_{r+1} *di punti singolari* $\left(\frac{(n-m+r+1)!}{r!(n-m+1)!}\right)^{upli}$, *rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine* $m-r+1$ *contenuti nella matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m\ ;\ k = 0, 1, \ldots, n)$. *Si chiamino ora* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *le coordinate di un punto* Z *di* W_{r+1}, *punto generico e quindi tale, che la* $\|\nabla^{(y;z)}A, B\ ;\ r, m\|$, *pensata come una matrice di forme nelle* $y_0, y_1, \ldots, y_d$, *risulti pure una matrice generica. Col precedente simbolo* $\|\nabla^{(y;z)}A, B\ ;\ r, m\|$ *si è indicata, se è* $0 \leq r \leq m-1$, *la matrice di* $m+1$ *linee e di* $n+1$ *colonne, nella quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{sima}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *sono:*

$$\begin{array}{c}
b_{00}\nabla_1^{(y;z)} a_{0k} + b_{01}\nabla_1^{(y;z)} a_{1k} + \cdots + b_{0m}\nabla_1^{(y;z)} a_{mk} \\
b_{10}\nabla_1^{(y;z)} a_{0k} + b_{11}\nabla_1^{(y;z)} a_{1k} + \cdots + b_{1m}\nabla_1^{(y;z)} a_{mk} \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
b_{r0}\nabla_1^{(y;z)} a_{0k} + b_{r1}\nabla_1^{(y;z)} a_{1k} + \cdots + b_{rm}\nabla_1^{(y;z)} a_{mk} \\
a_{r+1,k} \\
a_{r+2,k} \\
\vdots \\
a_{mk},
\end{array}$$

dove con $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *si devono intendere le coordinate del punto generico* Z *e dove*

$$b_{u0}, b_{u1}, \ldots, b_{um} \qquad (u = 0, 1, \ldots, r)$$

sono $r+1$ *soluzioni linearmente indipendenti del sistema di equazioni (nelle incognite x)*

$$a_{0u}x_0 + a_{1u}x_1 + \cdots + a_{mu}x_m = 0 \qquad (u = 0, 1, \ldots, m-r-1).$$

Il simbolo $\|\nabla^{(y;z)}A, B\ ;\ m, m\|$ *invece indica la matrice* $\|\nabla_1^{(y;z)}a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m\ ;\ k = 0, 1, \ldots, n)$ *di* $m+1$ *linee e di* $n+1$ *colonne, dove con* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *s'intendono sempre le coordinate del punto generico* Z. *Il luogo delle tangenti alla varietà* W_1 *nel punto multiplo* Z *è la varietà di ordine* $\frac{(n-m+r+1)!}{r!(n-m+1)!}$ *rappresentata analiticamente nelle* *coordinate, correnti omogenee di punto,* $y_0, y_1, \ldots, y_d$ *coll'annullare la matrice* $\|\nabla^{(y;z)}\mathrm{A}, \mathrm{B}\,;\, r, m\|$ (¹).

Queste ricerche si possono spingere molto più oltre; posseggo già notevoli risultati, che forse pubblicherò in seguito.

Fisica terrestre. — *Sui risultati di due ascensioni meteorologiche di palloni-sonda compiute in Castelfranco Veneto nell'agosto 1905.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Dai risultati delle numerose esplorazioni dell'alta atmosfera compiute mediante i palloni-sonda specialmente negli Osservatorî di Tegel e di Trappes, si è potuto rilevare una grande variabilità coll'altezza sul livello del mare del gradiente termico verticale, il quale molto di rado si avvicina al valore che dovrebbe avere per una caduta adiabatica della temperatura, cioè di 1° per ogni 100 metri di dislivello; queste variazioni del gradiente termico non presentano alcuna regolarità, ma sono diversissime da località a località e dipendono, come è naturale, in modo essenziale dalla situazione meteorologica esistente al momento in cui si effettua l'osservazione.

In tutti i casi però ove si superano i 10,000 metri di altezza si possono notare diversi cambiamenti di segno del gradiente termico verticale: ordinariamente in basso fra 0 e i 2000 metri si ha un primo cambiamento di segno cui susseguono dei gradienti piccoli accennanti quasi ad una isotermia che ordinariamente si aggira intorno ai 4000 metri di altezza, man mano poi il gradiente ricresce nuovamente fino quasi a raggiungare talvolta il limite adiabatico e magari a superarlo, ciò fra i 6000 e i 9000 metri; al di sopra di questa zona il gradiente diminuisce nuovamente fino all'isotermia per poi cambiar di segno ed accennare addirittura a un accrescimento di temperatura col crescere dell'altezza.

Lasciando da parte la prima inversione che si verifica spesso entro i primi 2000 metri, quasi sempre, quando si riesca a far superare al pallone-sonda i 9000-10,000 metri di altezza, si riscontrano nuove inversioni di segno del gradiente termico che talvolta possono essere abbastanza considerevoli,

Sembra che di queste inversioni superiori ce ne siano due, una verso i 10-11000 metri, ed una verso i 18000, talvolta si verificano tutte e due contemporaneamente come per esempio ebbesi a riscontrare nell'Osservatorio

(¹) La proposizione enunciata come applicazione geometrica verso la fine del § 9 della mia citata Memoria è stata stampata in modo inesatto, perchè nella 3ª linea di questa proposizione in luogo di *varietà dei punti* r^{upli} si deve leggere *varietà dei punti* $\left[\frac{(r+n-m)!}{(r-1)!\,(n-m+1)!}\right]^{upli}$.