ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 16 luglio 1905.

Matematica. — *Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

Col presente scritto mi propongo di mostrare come quegli stessi principii dei quali mi sono servito nel mio precedente lavoro (¹) sulle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile, si possano estendere in modo da risolvere la questione dell'arbitrarietà delle caratteristiche anche per le formole generali di addizione delle funzioni ϑ con un numero qualunque p di argomenti.

Per $p > 1$, le formole che si è soliti di abbracciare sotto il titolo generico di *formole di addizione*, presentano una grande varietà di tipi dei quali non si può ancora avere un concetto adeguato nel caso però semplice di $p = 1$; giacchè soltanto per $p > 1$ incomincia a manifestarsi l'importanza fondamentale che ha in questa teoria la nozione di *gruppi* di caratteristiche. Malgrado ciò, accade per queste formole, come per quelle relative al caso $p = 1$, che esse hanno il loro centro o, meglio, il loro naturale punto di partenza in un'unica formola generale dalla quale si possono dedurre con procedimenti relativamente semplici i tanti e bei risultati ottenuti, negli ultimi cinquant'anni, nel campo delle formole di addizione; risultati che si collegano ai nomi di Göpel e Rosenhain ($p = 2$), di H. St. Smith, Prym, Nöther, Frobenius, ecc. Questo fatto è stato messo in evidenza specialmente dal Prym, il quale propose di dare a questa formola il nome

(¹) *Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile* (Rendiconti dei Lincei, 1° semestre 1905, pag. 477, Nota presentata nella seduta del 2 aprile).

di *formola fondamentale di Riemann* in base ad una comunicazione che egli aveva avuto dal grande matematico nel 1865.

La considerazione di questo fatto non poteva non semplificare notevolmente il còmpito che io mi era proposto; quello cioè di ricercare se e fino a qual punto le formole più generali di addizione, date finora, precisamente come la formola fondamentale di Riemann, soltanto per valori razionali degli elementi delle caratteristiche, potessero estendersi anche a valori reali od imaginarî qualisivogliono dei medesimi. Mi era infatti sembrato assai probabile che la risoluzione della questione per la formola fondamentale di Riemann dovesse virtualmente contenere anche la risoluzione della questione stessa per tutte le più importanti formole di addizione fin qui date, in quanto esse si possano dedurre dalla formola di Riemann con procedimenti che non dipendano dalla speciale natura delle caratteristiche fondamentali.

Nel § III di questo scritto ho dato appunto due diverse estensioni della formola fondamentale di Riemann. La prima (formola (III)) si riferisce al caso in cui le caratteristiche fondamentali

$$\begin{bmatrix} \gamma' \\ g' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma'' \\ g'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma''' \\ g''' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma^{\mathrm{IV}} \\ g^{\mathrm{IV}} \end{bmatrix}$$

che definiscono il prodotto fondamentale

$$\vartheta\begin{bmatrix} \gamma' \\ g' \end{bmatrix}((z')) \,.\, \vartheta\begin{bmatrix} \gamma'' \\ g'' \end{bmatrix}((z'')) \,.\, \vartheta\begin{bmatrix} \gamma''' \\ g''' \end{bmatrix}((z''')) \,.\, \vartheta\begin{bmatrix} \gamma^{\mathrm{IV}} \\ g^{\mathrm{IV}} \end{bmatrix}((z^{\mathrm{IV}}))$$

si compongono di elementi del tutto arbitrarî, cioè reali od imaginarî qualisivogliano. Nella seconda (formola (III)') le dette caratteristiche si suppongono assoggettate alla sola restrizione che le semi-somme:

$$\tfrac{1}{2}(\gamma'_\mu + \gamma''_\mu + \gamma'''_\mu + \gamma^{\mathrm{IV}}_\mu) \;,\; \tfrac{1}{2}(g'_\mu + g''_\mu + g'''_\mu + g^{\mathrm{IV}}_\mu) \,; \quad \mu = 1\,, 2\,, \ldots\,, p$$

siano dei numeri interi. È notevole il fatto, da me già rilevato per $p = 1$, che questa sola restrizione è già sufficiente a dare alla formola il suo massimo grado di semplicità, cioè precisamente quella stessa *forma* che si otterrebbe supponendo interi tutti i singoli elementi

$$\gamma^{(\varrho)}_\mu \,,\, g^{(\varrho)}_\mu \,; \qquad \varrho = 1\,, 2\,, 3\,, 4\,; \mu = 1\,, 2\,, \ldots\, p\,.$$

Credo anche utile richiamare l'attenzione sul fatto che il passaggio dalla prima alla seconda formola si può effettuare mediante uno scambio letterale semplicissimo; giacchè è prevedibile che con questo stesso scambio si possa poi passare da qualunque formola di addizione, relativa al primo caso, alla corrispondente formola relativa al secondo.

Nel § IV ho dedotto dalla formola fondamentale quelle formole generali di addizione, ciascuna delle quali è individuata da uno speciale *gruppo* *di caratteristiche*, che si possono in qualche modo riguardare come l'estensione a p argomenti della formola fondamentale di Jacobi. La deduzione è fatta con procedimenti analoghi a procedimenti già ben noti per la deduzione di questi tipi di formole dalla formola fondamentale di Riemann nel caso di caratteristiche ad elementi interi ([1]). L'esempio di queste formole, da me date così per il primo (formola (IV)), come per il secondo (formola (IV)') dei due casi sopra menzionati, penso possa essere sufficiente a generare in chi legge la convinzione che anche gli altri tipi di formole di addizione per p argomenti si possano dedurre dalle formole fondamentali (III) o (III)' con procedimenti simili a quelli che già sono stati escogitati per il caso di caratteristiche ad elementi interi.

I.

1. Sia definita la funzione

$$\vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \\ g_1, g_2, \ldots, g_p\end{bmatrix}(z_1, z_2, \ldots, z_p) \equiv \vartheta\begin{bmatrix}\gamma \\ g\end{bmatrix}((z))$$

di argomenti $z_1, z_2, \ldots, z_p$ colla *caratteristica*

$$\begin{bmatrix}\gamma_1, \ldots, \gamma_p \\ g_1, \ldots, g_p\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\gamma \\ g\end{bmatrix},$$

le γ e g essendo numeri reali od imaginarî qualisivogliano, mediante la formola:

$$(1) \quad \vartheta\begin{bmatrix}\gamma \\ g\end{bmatrix}((z)) = \sum_{n_1, \ldots, n_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\pi i \sum\limits_{\mu, \mu'}^{1, \ldots, p} \omega_{\mu\mu'}\left(n_\mu + \frac{\gamma_\mu}{2}\right)\left(n_{\mu'} + \frac{\gamma_{\mu'}}{2}\right) + 2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu + \frac{\gamma_\mu}{2}\right)\left(z_\mu + \frac{g_\mu}{2}\right)}$$

Noi partiremo dalla relazione ([2]):

$$(\mathrm{I}) \qquad 2^p \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1^{(\rho)}, \ldots, \gamma_p^{(\rho)} \\ g_1^{(\rho)}, \ldots, g_p^{(\rho)}\end{bmatrix}(z_1^{(\rho)}, \ldots, z_p^{(\rho)}) =$$

$$\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (\sigma_\mu + \varepsilon_\mu)\eta_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta\begin{bmatrix}\gamma_1^{(\rho)} - \sigma_1 + \varepsilon_1, \ldots, \gamma_p^{(\rho)} - \sigma_p + \varepsilon_p \\ g_1^{(\rho)} - s_1 + \eta_1, \ldots, g_p^{(\rho)} - s_p + \eta_p\end{bmatrix}((\bar{z}^{(\rho)}))$$

([1]) Cfr. p. es. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1904), pagg. 308-309.

([2]) Questa formola è stata data per la prima volta da H. St. Smith (*Note on the formula for the multiplication of four Theta Functions.* Proceedings of the London Math. Soc. Vol. 10°, 1879) nel presupposto che gli elementi delle caratteristiche siano *numeri interi*. Che questa restrizione non sia necessaria, l'ho già fatto rilevare, pel caso di $p = 1$, nella quale le $\gamma_\mu^{(\rho)}$, $g_\mu^{(\rho)}$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4\,;\ \mu = 1, 2, \ldots, p)$ sono dei numeri reali od immaginarî affatto arbitrarî e dove

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \bar{z}'_\mu &= \tfrac{1}{2}(z'_\mu - z''_\mu - z'''_\mu - z^{\mathrm{IV}}_\mu) &\qquad \sigma_\mu &= \tfrac{1}{2}(\gamma'_\mu + \gamma''_\mu + \gamma'''_\mu + \gamma^{\mathrm{IV}}_\mu) \\ \bar{z}''_\mu &= \tfrac{1}{2}(-z'_\mu + z''_\mu - z'''_\mu - z^{\mathrm{IV}}_\mu)\,, & s_\mu &= \tfrac{1}{2}(g'_\mu + g''_\mu + g'''_\mu + g^{\mathrm{IV}}_\mu) \\ \bar{z}'''_\mu &= \tfrac{1}{2}(-z'_\mu - z''_\mu + z'''_\mu - z^{\mathrm{IV}}_\mu) & & (\mu = 1, 2, \ldots, p) \\ \bar{z}^{\mathrm{IV}}_\mu &= \tfrac{1}{2}(-z'_\mu - z''_\mu - z'''_\mu + z^{\mathrm{IV}}_\mu) \end{aligned}$$

In questa formola con

$$\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1}$$

abbreviazione del simbolo

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p}^{0,1}\ \sum_{\eta_1,\ldots,\eta_p}^{0,1}$$

si vuol significare che la sommatoria va estesa a tutti i 2^{2p} sistemi

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p\,;\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$$

nei quali le ε, η possono ricevere i valori $0, 1$; od anche, che è poi la stessa cosa [1], a tutte quelle caratteristiche ad elementi *interi*:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$$

che sono distinte fra loro (mod. 2).

2. Se poniamo per maggior comodità di scrittura:

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} \\ g^{(\rho)} \end{bmatrix} ((z^{(\rho)})) &= \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ g \end{pmatrix}\right] \\ \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} \\ g^{(\rho)} \end{bmatrix} ((\bar{z}^{(\rho)})) &= \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ g \end{pmatrix}\right]' \end{aligned}$$

---

nella mia Nota: *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile* (Rendiconti dei Lincei, 1° semestre 1902, pag. 255) nella quale sono giunto a questa formola per altra via, deducendola dalla formola fondamentale di Jacobi. Non ho stimato necessario di trattenermi qui a dimostrare la stessa cosa per $p > 1$, giacchè ciò risulta anche dallo stesso procedimento dimostrativo indicato dallo Smith, salvo qualche modificazione di indole non essenziale.

(1) È facile riconoscere che il valore di:

$$e^{\pi i \sum\limits_\mu (\sigma_\mu + \varepsilon_\mu)\eta_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma_1^{(\rho)} - \sigma_1 + \varepsilon_1, \ldots, \gamma_p^{(\rho)} - \sigma_p + \varepsilon_p \\ g_1^{(\rho)} - s_1 + \eta_1, \ldots, g_p^{(\rho)} - s_p + \eta_p \end{bmatrix} ((\bar{z}^{(\rho)}))$$

non si altera sostituendo ad $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$ una caratteristica i cui elementi, del pari interi, siano rispettivamente congrui (mod. 2) ai corrispondenti elementi di $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$.

e scriviamo inoltre per brevità:

$$(3) \qquad \gamma^{(\rho)} - \sigma_\mu = \bar{\gamma}_\mu^{(\rho)} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4 \; ; \; \mu = 1, 2, \ldots, p),$$

possiamo compendiare la formola (I) come segue:

$$(\mathrm{I}) \qquad 2^p \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ g \end{pmatrix}\right] = \sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i \sum\limits_\mu (\sigma_\mu + \varepsilon_\mu)\eta_\mu} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma} + \varepsilon \\ \bar{g} + \eta \end{pmatrix}\right]'$$

giacchè, in conformità alle notazioni (2), si deve intendere:

$$\left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma} + \varepsilon \\ \bar{g} + \eta \end{pmatrix}\right]' = \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1^{(\rho)} + \varepsilon_1, \ldots, \bar{\gamma}_p^{(\rho)} + \varepsilon_p \\ \bar{g}_1^{(\rho)} + \eta_1, \ldots, \bar{g}_p^{(\rho)} + \eta_p \end{bmatrix} ((\bar{z}))$$

II.

1. Siano ora

$$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p \quad ; \quad \eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_p$$

due sistemi di p numeri interi qualisivogliano. Cangiando nella (I) le $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu, \gamma'''_\mu, \gamma^{\mathrm{IV}}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ rispettivamente in:

$$\gamma'_\mu + \varepsilon'_\mu, \; \gamma''_\mu + \varepsilon'_\mu, \; \gamma'''_\mu + \varepsilon'_\mu, \; \gamma^{\mathrm{IV}}_\mu + \varepsilon'_\mu$$

e così le $g'_\mu, g''_\mu, g'''_\mu, g^{\mathrm{IV}}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ risp. in:

$$g'_\mu + \eta'_\mu, \; g''_\mu + \eta'_\mu, \; g'''_\mu + \eta'_\mu, \; g^{\mathrm{IV}}_\mu + \eta'_\mu$$

con che le $\bar{\gamma}_\mu^{(\rho)}$, $\bar{g}_\mu^{(\rho)}$ si cangieranno risp. in:

$$\bar{\gamma}_\mu^{(\rho)} - \varepsilon'_\mu, \; \bar{g}_\mu^{(\rho)} - \eta'_\mu \quad (\varrho = 1, 1, 2, 3, 4 \; ; \; \mu = 1, 2, \ldots, p),$$

si ottiene:

$$2^p \left[\begin{pmatrix} \gamma + \varepsilon' \\ g + \eta' \end{pmatrix}\right] = \sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i \sum\limits_\mu (\sigma_\mu + \varepsilon_\mu)\eta_\mu} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma} - \varepsilon' + \varepsilon \\ \bar{g} - \eta' + \eta \end{pmatrix}\right]'$$

Se poniamo:

$$(1) \qquad \varepsilon_\mu - \varepsilon'_\mu = \varepsilon''_\mu + 2\alpha_\mu, \; \eta_\mu - \eta'_\mu = \eta''_\mu + 2\beta_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

dove le $\varepsilon''_\mu, \eta''_\mu$ possono avere i valori 0 od 1 e le α_μ, β_μ sono certi interi ben determinati, si potrà anche scrivere [1]:

[1] Si tenga presente qui ed in seguito la formola generale:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \gamma_1 + 2h_1, \ldots, \gamma_p + 2h_p \\ g_1 + 2k_1, \ldots, g_p + 2k_p \end{bmatrix} ((z)) = e^{\pi i \sum\limits_\mu \gamma_\mu h_\mu} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_p \\ g_1, \ldots, g_p \end{bmatrix} ((z))$$

che sussiste qualunque siano gl'interi $h_1, \ldots, h_p$, $k_1, \ldots, k_p$.

$$2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu+\varepsilon_\mu)\eta_\mu}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''+2\beta\end{pmatrix}\right]'$$

Ma

$$\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''+2\beta\end{pmatrix}\right]'=\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}(\bar{\gamma}_\mu^{(\rho)}+\varepsilon''_\mu)\beta_\mu}\right\}\cdot\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'$$

$$=e^{\pi i\sum\limits_{\rho=1}^{\rho=4}\sum\bar{\gamma}_\mu^{(\rho)}\beta_\mu}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'=e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu}\beta_\mu\sigma_\mu}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'$$

Si ha dunque:

$$2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu\eta_\mu+\varepsilon_\mu\eta_\mu-2\beta_\mu\sigma_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'$$

e quindi anche per le (1):

$$2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu\eta'_\mu+\sigma_\mu\eta''_\mu+\varepsilon_\mu\eta_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'=$$

$$=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}\{\sigma_\mu\eta'_\mu+\sigma_\mu\eta''_\mu+(\varepsilon'_\mu+\varepsilon''_\mu)(\eta'_\mu+\eta''_\mu)\}}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'=$$

$$=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}(\eta'_\mu+\eta''_\mu)(\varepsilon'_\mu+\varepsilon''_\mu+\sigma_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon''\\ \bar{g}+\eta''\end{pmatrix}\right]'$$

Possiamo dunque concludere che:

$$\text{(II)}\qquad 2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} e^{\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu+\eta'_\mu)(\varepsilon_\mu+\varepsilon'_\mu+\sigma_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon\\ \bar{g}+\eta\end{pmatrix}\right]'$$

Infatti, poichè ad ogni sistema di valori delle $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p$, $\eta_1,\ldots,\eta_p$ corrisponde un unico sistema di valori delle $\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_p$, $\eta''_1,\ldots,\eta''_p$ e reciprocamente, è chiaro che la somma del secondo membro non potrà differire che per l'ordine dei termini da quella scritta precedentemente.

2. Alla formola generale (II) si può sostituire una formola ancor più semplice nel caso in cui i numeri σ_μ, s_μ $(\mu=1,2,\ldots,p)$ siano tutti interi.

Posto infatti, in questa ipotesi:

$$\text{(2)}\qquad -\sigma_\mu+\varepsilon_\mu=\bar{\varepsilon}_\mu+2\alpha_\mu\ ,\ -s_\mu+\eta_\mu=\bar{\eta}_\mu+2\beta_\mu\quad(\mu=1,2,\ldots,p)$$

dove ε_μ, η_μ possono avere i valori 0 ed 1 ed α_μ, β_μ sono dei numeri interi, si ha:

$$\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon\\ \bar{g}+\eta\end{pmatrix}\right]'=\left[\begin{pmatrix}\gamma+\bar{\varepsilon}\\ g+\bar{\eta}+2\beta\end{pmatrix}\right]'=\left\{\prod_{\rho=1}^{\rho=4} e^{\pi i\sum\limits_{\mu}\beta_\mu(\gamma_\mu^{(\rho)}+\bar{\varepsilon}_\mu)}\right\}\left[\begin{pmatrix}\gamma+\bar{\varepsilon}\\ g+\bar{\eta}\end{pmatrix}\right]',$$

cioè:

$$\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon\\ \bar{g}+\eta\end{pmatrix}\right]'=\left[\begin{pmatrix}\gamma+\bar{\varepsilon}\\ g+\bar{\eta}\end{pmatrix}\right]',$$

poichè:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\beta_\mu\,\gamma_\mu^{(\rho)}=2\beta_\mu\,\sigma_\mu$$

è un numero pari.

Dalle (2) si ha poi

$$\eta_\mu+\eta'_\mu\equiv\bar{\eta}_\mu+\eta'_\mu+s_\mu\,,\quad \varepsilon_\mu+\varepsilon'_\mu+\sigma_\mu\equiv\bar{\varepsilon}_\mu+\varepsilon'_\mu \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$(\mu=1\,,2\,,\ldots,p)\,.$$

La (II) ci dà per conseguenza:

$$2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\eta),(\varepsilon)}^{0,1}(-1)^{\sum\limits_{\mu}(\bar{\eta}_\mu+\eta'_\mu+s_\mu)(\bar{\varepsilon}_\mu+\varepsilon'_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\gamma+\bar{\varepsilon}\\ g+\bar{\eta}\end{pmatrix}\right]'$$

e questa formola si può scrivere, a meno di un semplice cambiamento nell'ordine dei termini del secondo membro:

$$\text{(II)}'\qquad 2^p\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1}(-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu+\varepsilon'_\mu)(\eta_\mu+\eta'_\mu+s_\mu)}\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon\\ g+\eta\end{pmatrix}\right]'$$

giacchè ad ogni sistema delle (ε), (η) corrisponde, in virtù delle (2), un unico sistema $(\bar{\varepsilon})$, $(\bar{\eta})$, e reciprocamente.

III.

1. Alla formola (II) del precedente § può anche darsi la forma:

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}&2^p\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon'_\mu-\sigma_\mu)\eta'_\mu}\left[\begin{pmatrix}\gamma+\varepsilon'\\ g+\eta'\end{pmatrix}\right]=\\ &=\sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\eta_\mu\varepsilon'_\mu)}\, e^{\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu+\sigma_\mu)\eta_\mu}\left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}+\varepsilon\\ \bar{g}+\eta\end{pmatrix}\right]'\end{aligned}$$

Se dunque, in conformità delle definizioni da noi già date per le σ ed s:

$$(2)\qquad \sigma_\mu = \tfrac{1}{2}(\gamma'_\mu + \gamma''_\mu + \gamma'''_\mu + \gamma^{\text{IV}}_\mu)\ ,\ s_\mu = \tfrac{1}{2}(g'_\mu + g''_\mu + g'''_\mu + g^{\text{IV}}_\mu)$$
$$\mu = 1\,, 2\,, \ldots, p\,,$$

poniamo

$$(3)\qquad \bar\sigma_\mu = \tfrac{1}{2}(\bar\gamma'_\mu + \bar\gamma''_\mu + \bar\gamma'''_\mu + \bar\gamma^{\text{VI}}_\mu)\ ,\ \bar s_\mu = \tfrac{1}{2}(\bar g'_\mu + \bar g''_\mu + \bar g'''_\mu + \bar g^{\text{IV}}_\mu)$$
$$\mu = 1\,, 2\,, \ldots, p\,,$$

e poniamo inoltre per brevità:

$$(4)\qquad \begin{aligned} e^{\pi i \sum\limits_\mu (\varepsilon_\mu - \sigma_\mu)\eta_\mu} \left[\begin{pmatrix} \gamma + \varepsilon \\ g + \eta \end{pmatrix}\right] &= \left[\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon \\ g\,, \eta \end{pmatrix}\right] \\ e^{\pi i \sum\limits_\mu (\varepsilon_\mu - \sigma_\mu)\eta_\mu} \left[\begin{pmatrix} \gamma + \varepsilon \\ g + \eta \end{pmatrix}\right]' &= \left[\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon \\ g\,, \eta \end{pmatrix}\right]' \end{aligned}$$

la (1) si può compendiare come segue:

$$(\text{III})\qquad 2^p \left[\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon' \\ g\,, \eta' \end{pmatrix}\right] = \sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} (-1)^{\sum\limits_\mu (\varepsilon_\mu \eta'_\mu + \eta_\mu \varepsilon'_\mu)} \left[\begin{pmatrix} \bar\gamma\,, \varepsilon \\ \bar g\,, \eta \end{pmatrix}\right]'$$

giacchè dalle (3) e dalle relazioni:

$$(5)\qquad \bar\gamma^{(\rho)}_\mu = \gamma^{(\rho)}_\mu - \sigma_\mu\ ,\ \bar g^{(\rho)}_\mu = g^{(\rho)}_\mu - s_\mu \qquad (\varrho = 1\,,2\,,3\,,4\ ;\ \mu = 1\,,2\,,\ldots,p)$$

che definivano le $\bar\gamma$ e $\bar g$, segue manifestamente:

$$\bar\sigma_\mu = -\sigma_\mu\ ,\ \bar s_\mu = -s_\mu \qquad (\mu = 1\,, 2\,, \ldots, p).$$

2. Nel caso in cui le semi-somme $\sigma_\mu\,, s_\mu$ $(\mu = 1\,, 2\,, \ldots, p)$ siano dei numeri interi, in luogo del simbolo sopra definito:

$$\left[\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon \\ g\,, \eta \end{pmatrix}\right] = e^{\pi i \sum\limits_\mu (\varepsilon_\mu - \sigma_\mu)\eta_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} + \varepsilon \\ g^{(\rho)} + \eta \end{bmatrix} ((z))$$

e dell'analogo

$$\left[\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon \\ g\,, \eta \end{pmatrix}\right]' = e^{\pi i \sum\limits_\mu (\varepsilon_\mu - \sigma_\mu)\eta_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} + \varepsilon \\ g^{(\rho)} + \eta \end{bmatrix} ((\bar z))$$

ci giova introdurre i simboli:

$$\left\{\begin{pmatrix} \gamma\,, \varepsilon \\ g\,, \eta \end{pmatrix}\right\} = (-1)^{\sum\limits_\mu (\eta_\mu - s_\mu)\varepsilon_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta \begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} + \varepsilon \\ g^{(\rho)} + \eta \end{bmatrix} ((z))$$

e

$$\left\{\begin{pmatrix}\gamma\,,\,\varepsilon\\ g\,,\,\eta\end{pmatrix}\right\}' = (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\eta_\mu - s_\mu)\varepsilon_\mu} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta\begin{bmatrix}\gamma^{(\rho)}+\varepsilon\\ g^{(\rho)}+\eta\end{bmatrix}((\bar{z}))$$

È infatti ben chiaro che, come dalla (II) si è dedotta la (III), così si dedurrebbe per questi nuovi simboli dalla (II)′ la relazione:

$$\text{(III)}' \qquad 2^p \left\{\begin{pmatrix}\gamma\,,\,\varepsilon'\\ g\,,\,\eta'\end{pmatrix}\right\} = \sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu + \eta_\mu \varepsilon'_\mu)} \left\{\begin{pmatrix}\gamma\,,\,\varepsilon\\ g\,,\,\eta\end{pmatrix}\right\}' \text{ (1)}.$$

IV.

1. Siano ora

$$\text{(1)} \qquad \begin{bmatrix}\varepsilon'\\ \eta'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varepsilon''\\ \eta''\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}\varepsilon^{(n)}\\ \eta^{(n)}\end{bmatrix}$$

n caratteristiche ad elementi interi, fra loro distinte (mod. 2) e formanti un *gruppo*; tali cioè che si abbia per due valori qualunque di h e k $(h\,,k=1\,,2\,,\ldots,n)$ e per un valore opportuno di $\nu(\nu=1\,,2\,,\ldots,n)$:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon^{(h)}+\varepsilon^{(k)}\\ \eta^{(h)}+\eta^{(k)}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\varepsilon^{(\nu)}\\ \eta^{(\nu)}\end{bmatrix} \qquad \text{(mod. 2)}$$

Il numero n può essere, come è noto e come è facile di riconoscere, una potenza qualunque $n=2^\nu(\nu \gtreqless 2p)$ del numero 2.

Essendo inoltre $\begin{bmatrix}\alpha\\ a\end{bmatrix}$ una caratteristica ad elementi interi fissata a piacere, si sostituiscano nella (III) in luogo di $\begin{bmatrix}\varepsilon'\\ \eta'\end{bmatrix}$ successivamente le n caratteristiche

$$\begin{bmatrix}\varepsilon'+\alpha\\ \eta'+a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varepsilon''+\alpha\\ \eta''+a\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}\varepsilon^{(n)}+\alpha\\ \eta^{(n)}+a\end{bmatrix}$$

e si sommino le uguaglianze così ottenute membro a membro. Si trova così:

$$\text{(2)} \qquad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} \left[\begin{pmatrix}\gamma\,,\,\varepsilon^{(i)}+\alpha\\ g\,,\,\eta^{(i)}+a\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \sum_{(\varepsilon),(\eta)}^{0,1} \left\{ (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu a_\mu + \eta_\mu \alpha_\mu)} \left[\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\,,\,\varepsilon\\ \bar{g}\,,\,\eta\end{pmatrix}\right]' \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu \eta^{(i)}_\mu + \eta_\mu \varepsilon^{(i)}_\mu)} \right\}.$$

(1) A questa formola corrisponde, per il caso particolare di caratteristiche ad elementi interi, la formola fondamentale di Riemann di cui ho già fatto menzione nell'introduzione. Le prime dimostrazioni di quest'ultima formola, di cui già si riscontrano alcune linee essenziali nella formola già citata dello Smith, sono state date da Frobenius (1880) nella Memoria: *Ueber das Additionstheorem der Thetafunktionem mehrerer Variablen* (J. für Math., vol. 89) e da Prym (1882) nelle sue: *Untersuchungen uber die Riemannsche Thetaformel*, come pure nella Memoria: *Kurze Ableitung der Riemannschen Thetaformel* (J. für Math., vol. 93), ecc.

Poichè le (1) costituiscono un gruppo, la somma:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\sum_\mu (\varepsilon_\mu \eta_\mu^{(i)} + \eta_\mu \varepsilon_\mu^{(i)})}$$

ha valore diverso da zero, come si sa dalla teoria dei gruppi di caratteristiche ad elementi interi, per quelle sole caratteristiche $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{bmatrix}$ che soddisfanno alle condizioni:

$$\varepsilon_\mu \eta_\mu^{(i)} + \eta_\mu \varepsilon_\mu^{(i)} \equiv 0 \pmod{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

e per queste ha poi evidentemente il valore n. Le caratteristiche, fra loro distinte (mod. 2), che soddisfanno alle condizioni (3), noi le indicheremo con:

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}' \\ \bar{\eta}' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}'' \\ \bar{\eta}'' \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}^{(m)} \\ \bar{\eta}^{(m)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Esse formano evidentemente un gruppo ed il loro numero è dato da

$$m = \frac{2^{2p}}{n} = 2^{2p-\nu} \tag{5}$$

Il gruppo delle (4) è il così detto *aggiunto* del gruppo delle (1); come, reciprocamente, il gruppo delle (1) è a sua volta l'aggiunto del gruppo (4) [1].

Pertanto la (2) si riduce alla forma più semplice:

$$2^p \sum_{i=1}^{i=n} \left[\begin{pmatrix} \gamma, \varepsilon^{(i)} + \alpha \\ g, \eta^{(i)} + a \end{pmatrix} \right] = \tag{H}$$

$$= n \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\sum_\mu (\bar{\varepsilon}_\mu^{(i)} a_\mu + \bar{\eta}_\mu^{(i)} \alpha_\mu)} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}^{(i)} \\ \bar{g}, \bar{\eta}^{(i)} \end{pmatrix} \right]'.$$

Se in questa formola noi scambiamo, come è lecito, le $\gamma_\mu^{(\varrho)}$, $z_\mu^{(\varrho)}$ rispettivamente colle $\bar{\gamma}_\mu^{(\varrho)}$, $\bar{z}_\mu^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, 2, 3, 4\ ;\ \mu = 1, 2, \ldots, p)$ e scambiamo inoltre, come è del pari lecito, il gruppo delle (1) col gruppo delle (4), essa diviene:

$$2^p \sum_{i=1}^{i=m} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}^{(i)} + \alpha \\ \bar{g}, \bar{\eta}^{(i)} + a \end{pmatrix} \right]' = m \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\sum_\mu (\varepsilon_\mu^{(i)} a_\mu + \eta_\mu^{(i)} \alpha_\mu)} \left[\begin{pmatrix} \gamma, \varepsilon^{(i)} \\ g, \eta^{(i)} \end{pmatrix} \right]$$

(1) Circa i pochi teoremi, da noi qui invocati, che riguardano la teoria dei gruppi di caratteristiche, cfr. p. es. Krazer, l. c., pp. 291-296 e pp. 308-309.

il che, per le (5), si può anche scrivere:

$$\text{(K)}\quad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu^{(i)} a_\mu + \eta_\mu^{(i)} \alpha_\mu)} \left[\begin{pmatrix} \gamma\,,\,\varepsilon^{(i)} \\ g\,,\,\eta^{(i)} \end{pmatrix}\right] = n \sum_{i=1}^{i=m} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}\,,\,\bar{\varepsilon}^{(i)}+\alpha \\ \bar{g}\,,\,\bar{\eta}^{(i)}+a \end{pmatrix}\right]'$$

Se poniamo per brevità:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{(i)} \\ \eta^{(i)} \end{bmatrix} = [\omega^{(i)}]\,,\quad \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}^{(i)} \\ \bar{\eta}^{(i)} \end{bmatrix} = [\bar{\omega}^{(i)}]$$

e se, essendo:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix} = [\mathrm{A}]\,,\quad \begin{bmatrix} \beta \\ b \end{bmatrix} = [\mathrm{B}]$$

due caratteristiche ad elementi interi qualisivogliano, poniamo altresì:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_\mu b_\mu + a_\mu \beta_\mu) = (\mathrm{A}\,,\,\mathrm{B}),$$

si riconosce agevolmente che le formole (H) e (K) sono contenute entrambe nell' unica formola più simmetrica:

$$\text{(IV)}\qquad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{(\omega^{(i)},\,\mathrm{B})} \left[\begin{pmatrix} \gamma\,,\,\varepsilon^{(i)}+\alpha \\ g\,,\,\eta^{(i)}+a \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (-1)^{(\mathrm{B},\mathrm{A})} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{(\bar{\omega}^{(i)},\,\mathrm{A})} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}\,,\,\bar{\varepsilon}^{(i)}+\beta \\ \bar{g}\,,\,\bar{\eta}^{(i)}+b \end{pmatrix}\right].$$

Questa formola non differisce però sostanzialmente dalla (H), dalla quale si può dedurre cangiando le caratteristiche:

$$\begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)} \\ g^{(\rho)} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix},\qquad (\rho = 1\,,2\,,3\,,4)$$

rispettivamente in

$$\begin{bmatrix} \gamma^{(\rho)}-\beta \\ g^{(\rho)}-b \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ a+b \end{bmatrix},\qquad (\rho = 1\,,2\,,3\,,4)$$

e tenendo presenti le relazioni:

$$\left[\begin{pmatrix} \gamma-\beta\ ,\ \varepsilon^{(i)}+\alpha+\beta \\ g-b\ ,\ \eta^{(i)}+a+b \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (-1)^{(\omega^{(i)},\mathrm{B})+(\mathrm{A},\mathrm{B})} \left[\begin{pmatrix} \gamma\,,\,\varepsilon^{(i)}+\alpha \\ g\,,\,\eta^{(i)}+a \end{pmatrix}\right] e^{-\pi i \sum\limits_{\mu}(\beta_\mu+\sigma_\mu) b_\mu}$$

e

$$\left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}+\beta\,,\,\bar{\varepsilon}^{(i)} \\ \bar{g}+b\,,\,\bar{\eta}^{(i)} \end{pmatrix}\right] = (-1)^{(\omega^{(i)},\,\mathrm{B})} \left[\begin{pmatrix} \bar{\gamma}\,,\,\bar{\varepsilon}^{(i)}+\beta \\ \bar{g}\,,\,\bar{\eta}^{(i)}+b \end{pmatrix}\right] e^{-\pi i \sum\limits_{\mu}(\beta_\mu-\bar{\sigma}_\mu) b_\mu}$$

3. Facciamo ora l'ipotesi speciale che le semi-somme σ_μ, s_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$) siano numeri interi. È chiaro che in tal caso, operando sulla (III)', precisamente come si è operato sulla (III), si otterrà come corrispondente alla (H) la relazione:

$$(\mathrm{H})' \quad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \varepsilon^{(i)} + \alpha \\ g, \eta^{(i)} + a \end{pmatrix}\right\} = n \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\bar{\varepsilon}_\mu^{(i)} a_\mu + \bar{\eta}_\mu^{(i)} \alpha_\mu)} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \bar{\varepsilon}^{(i)} \\ g, \bar{\eta}^{(i)} \end{pmatrix}\right\}'$$

e di qui poi come corrispondente alla (K) la formola:

$$(\mathrm{K})' \quad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{\sum\limits_{\mu}(\varepsilon_\mu^{(i)} a_\mu + \eta_\mu^{(i)} \alpha_\mu)} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \varepsilon^{(i)} \\ g, \eta^{(i)} \end{pmatrix}\right\} = n \sum_{i=1}^{i=m} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \bar{\varepsilon}^{(i)} + \alpha \\ g, \bar{\eta}^{(i)} + a \end{pmatrix}\right\}'.$$

Pertanto: *nell'ipotesi che le* σ_μ, s_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, p$) *siano numeri interi, si può sostituire alla relazione* (IV) *la relazione più semplice:*

$$(\mathrm{IV})' \quad 2^p \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{(\omega^{(i)}, \mathrm{B})} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \varepsilon^{(i)} + \alpha \\ g, \eta^{(i)} + a \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= (-1)^{(\mathrm{B}, \mathrm{A})} n \cdot \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{(\bar{\omega}^{(i)}, \mathrm{A})} \left\{\begin{pmatrix} \gamma, \bar{\varepsilon}^{(i)} + \beta \\ g, \bar{\eta}^{(i)} + b \end{pmatrix}\right\}'.$$

Fisica terrestre. — *Sulla radioattività dei soffioni boraciferi della Toscana e sulla quantità di emanazione in essi contenuta.* Nota preliminare del Corrispondente R. NASINI e dei dottori F. ANDERLINI, e M. G. LEVI.

Già dall'ottobre 1904 abbiamo iniziato una estesa serie di ricerche sulla radioattività della regione toscana dei soffioni boraciferi: esse vennero continuate fino ad ora ad intervalli di tempo, e verranno con certezza condotte a termine tra qualche mese. Mentre ci riserbiamo di dare allora estesa relazione del copiosissimo materiale sperimentale raccolto, ci limitiamo per ora a dare un breve resoconto delle indagini eseguite e dei risultati ottenuti che ci sembrano presentare qualche interesse, sia per la conoscenza speciale dei fenomeni vulcanici della regione toscana, sia per lo studio più generale dei fenomeni di radioattività.

Premettiamo che tale studio non si sarebbe potuto iniziare e continuare senza gli aiuti materiali e morali che ci pervennero da diverse parti. Riescirà facile comprendere che ricerche del genere di quelle che andremo esponendo, eseguite in luoghi lontani e spesso poco praticabili, esigono molto