ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

giacchè in questo caso dovrebbero prendere parte alla reazione due molecole di isocianato e non si dovrebbe avvertire l'odore del nitrosocomposto.

Comunichiamo con tutto riserbo i risultati di queste ricerche ancora preliminari, che per diverse ragioni ora siamo costretti ad interrompere.

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme.* Nota di Giovanni Z. Giambelli [1], presentata dal Socio C. Segre.

3. — Risultati sopra una classe di varietà definite per mezzo di una matrice generica di forme.

In questo § e nel seguente si farà uso per brevità del simbolo

$$(m, n; \mu, \nu; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c,$$

il cui significato risulta ben definito nella mia citata Memoria del R. Istituto Lombardo (1904) (cfr. specialmente i § 6, 7, 8). In questa vi sono parecchie espressioni di tal simbolo, secondochè è $\mu < c$, $\nu < c$, oppure $\mu = c$, $\nu < c$, ecc.; in questi § 3, 4 s'intenderà quella che risulta più elegante secondo i varî casi, la qual cosa è molto facile. Per evitare ambiguità aggiungiamo che p. es.

$$(m, n; \mu, \nu; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)_c$$

significa ciò che diventa $(m, n; \mu, \nu; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$, quando in luogo delle p e delle q si pensano le η e le θ rispettivamente.

I teoremi dei § 1, 2 associati a quelli della mia Memoria permettono di trovarne altri notevoli sopra queste varietà definite per mezzo di una matrice generica. In questi § 3, 4 si esporranno i soli enunciati, nei quali sarà sottinteso che d, dimensione dello spazio ambiente, sia sufficientemente grande; dai nostri enunciati però si ricaverà implicitamente quale sia nei varî casi il limite inferiore di d.

Anzitutto si trae facilmente:

Teorema III. — *Si designi con* $\|A\|$ *la matrice generica* $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, n)$, *ove le* a_{ik} *sono forme di ordine* $p_i + q_k$

[1] V. pag. 570.

(essendo p_i, q_k numeri interi positivi, in parte anche nulli) nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale $[d]$ e tali che per l'ipersuperficie $a_{ik} = 0$ il punto generico $Z^\star$ di coordinate $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_d$ sia $(\eta_i + \theta_k)^{upla}$ (essendo η_i, θ_k numeri interi positivi in parte anche nulli). Si chiami poi $\|\nabla^{(y;\zeta)} A\|^\star$ la matrice $\|\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\theta_k} a_{ik}(\zeta)\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m;$ $k = 0, 1, \ldots, n)$, dove $\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\theta_k} a_{ik}$ significa ciò che diventa $\nabla^{(y;z)}_{\eta_i+\theta_k} a_{ik}$, quando in luogo delle $z_0, z_1, \ldots, z_d$ si pongano le $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_d$.

Essendo $\lambda = min(m, n)$, $0 \leq \mu \leq c \leq \lambda$, $0 \leq \nu \leq c$, si designi con $W_{\lambda-c+1}(\mu; \nu)$ la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ contenuti nella matrice $\|A\|$ supponendo inoltre nulle la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i = i_0, i_1, \ldots, i_\mu; k = 0, 1, \ldots, n)$ e la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m; k = k_0, k_1, \ldots, k_\nu)$, dove $i_0, i_1, \ldots, i_\mu$ è una combinazione qualunque di $\mu + 1$ numeri della serie $0, 1, \ldots, m$ e dove $k_0, k_1, \ldots, k_\nu$ è una combinazione qualunque di $\nu + 1$ numeri della serie $0, 1, \ldots, n$. La $W_{\lambda-c+1}(\mu; \nu)$ è di dimensione $d - (m - c + 1)(n - c + 1) - 2c + \mu + \nu$ e di ordine

$$(m, n; \mu, \nu; p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_\mu}, p_{i'_1}, \ldots, p_{i'_{m-\mu}}; q_{k_0}, q_{k_1}, \ldots, q_{k_\nu}, q_{k'_1}, \ldots, q_{k'_{n-\nu}})_c,$$

dove qui e nel seguito s'indica con $i'_1, \ldots, i'_{m-\mu}$ ciò che diventa la serie dei numeri $0, 1, \ldots, m$, quando si escludono $i_0, i_1, \ldots, i_\mu$ e con $k'_1, \ldots, k'_{n-\nu}$ quello che diventa la serie dei numeri $0, 1, \ldots, n$, quando si escludono $k_0, k_1, \ldots, k_\nu$. La $W_{\lambda-c+1}(\mu; \nu)$ ammette in $Z^\star$ un punto di molteplicità

$$(m, n; \mu, \nu; \eta_{i_0}, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_\mu}, \eta_{i'_1}, \ldots, \eta_{i'_{m-\mu}}; \theta_{k_0}, \theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\nu}, \theta_{k'_1}, \ldots, \theta_{k'_{n-\nu}})_c,$$

tale che il luogo delle tangenti in $Z^\star$ ad essa $W_{\lambda-c+1}(\mu; \nu)$ è la varietà $T_{\lambda-c+1}(\mu; \nu)$ di dimensione $d - (m - c + 1)(n - c + 1) - 2c + \mu + \nu$ e di ordine

$$(m, n; \mu, \nu; \eta_{i_0}, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_\mu}, \eta_{i'_1}, \ldots, \eta_{i'_{m-\mu}}; \theta_{k_0}, \theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\nu}, \theta_{k'_1}, \ldots, \theta_{k'_{n-\nu}})_c,$$

rappresentata nelle correnti coordinate omogenee di punto $y_0, y_1, \ldots, y_d$ coll'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ contenuti nella matrice $\|\nabla^{(y;\zeta)} A\|^\star$, supponendo inoltre nulle la matrice $\|\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\theta_k} a_{ik}(\zeta)\|$ $(i = i_0, i_1, \ldots,$ $i_\mu; k = 0, 1, \ldots, n)$ e la matrice $\|\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\theta_k} a_{ik}(\zeta)\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m;$ $k = k_0, k_1, \ldots, k_\nu)$. In particolare si ha che la $T_{\lambda-c+1}(c; c)$ varietà luogo delle tangenti in $Z^\star$ alla varietà dei punti multipli $\left[\frac{(m+n-\lambda-c+1)!}{(\lambda-c)!(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$

della $W_1(\lambda\,;\lambda)$ *è la varietà dei punti multipli* $\left[\frac{(m+n-\lambda-c+1)!}{(\lambda-c)!(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$ *della varietà luogo delle tangenti in* Z^* *alla* $W_1(\lambda\,;\lambda)$. *Se si vuol mettere in evidenza questa relazione di reciprocità basta porre simbolicamente:*

$$\Psi = \text{varietà di punti multipli} \left[\frac{(m+n-\lambda-c+1)!}{(\lambda-c)!\,(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli} \text{della,}$$

$$\Omega = \text{varietà luogo delle tangenti in } Z^* \text{ alla,}$$

e allora segue:

$$\Omega\Psi W_1(\lambda\,;\lambda) = \Psi\Omega W_1(\lambda\,;\lambda).$$

Osservazioni. — Mi pare opportuno ricordare altre relazioni di reciprocità, sebbene si possano ottenere molto facilmente. Se si designa con L_μ la varietà rappresentata coll'annullare la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i = i_0, i_1, \ldots, i_\mu\,;$ $k = 0, 1, \ldots, n)$ e con C_ν la varietà rappresentata coll'annullare la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m\,;\, k = k_0, k_1, \ldots, k_\nu)$ e se I seguito da parentesi, racchiudente due o più simboli (semplici, oppure composti cioè aggruppamenti di simboli) separati da virgole, significa l'intersezione delle varietà rappresentate dai detti simboli separati da virgole, allora si può scrivere simbolicamente:

$$\begin{aligned}
\Omega I(L_\mu, \Psi W_1(\lambda\,;\lambda)) &= I(\Omega L_\mu, \Omega\Psi W_1(\lambda\,;\lambda)) = \\
&= I(\Omega L_\mu, \Psi\Omega W_1(\lambda\,;\lambda)) = T_{\lambda-c+1}(\mu\,;c) \qquad (^1)\\
\Omega I(L_\mu, C_\nu, \Psi W_1(\lambda\,;\lambda)) &= I(\Omega L_\mu, \Omega C_\nu, \Omega\Psi W_1(\lambda\,;\lambda)) = \\
&= I(\Omega L_\mu, \Omega C_\nu, \Psi\Omega W_1(\lambda\,;\lambda)) = T_{\lambda-c+1}(\mu\,;\nu)
\end{aligned}$$

Nell'enunciare il teorema precedente non si è poi assegnato esplicitamente nei varî casi il massimo numero delle p_i, o delle q_k, o delle η_i, o delle θ_k, uguali a zero, perchè, quando tali limiti sono superati, i corrispondenti simboli del tipo $(m, n\,;\mu, \nu\,;p_0, p_1, \ldots, p_m\,;q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$ sono uguali a zero e sono zero solo in tali casi, onde si può dire che tali limiti sono assegnati implicitamente; inoltre segue subito quali proprietà diventano di conseguenza illusorie. Così p. es. se le η_i nulle sono più di c e se nel tempo stesso le θ_k nulle sono pure più di c, allora

$$(m, n\,;\mu, \nu\,;\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m\,;\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)_c$$

è nullo, e la $\Psi W_1(\lambda\,;\lambda)$, se esiste, non passa per Z^* e la $\Omega\Psi W_1(\lambda\,;\lambda)$, ossia la $T_{\lambda-c+1}(c\,;c)$, non esiste (essendo una varietà di ordine zero).

(1) È facilissimo poi scrivere le analoghe relazioni simboliche per la $T_{\lambda-c+1}(c\,;\nu)$ considerando la C_ν invece della L_μ.

Le proprietà precedenti si estendono pure al caso di una matrice $\|A\|$ generica, dove le ipersuperficie $a_{ik} = 0$ sono dotate di un numero finito (conveniente) di punti singolari del tipo Z^*; invece dei punti singolari Z^* si potrebbero pensare anche spazî lineari singolari. Occorrerà però tener conto di alcune disuguaglianze, molto ovvie, affinchè tali punti, o spazî lineari, singolari possano esistere e affinchè le varietà considerate non degenerino spezzandosi in altre.

4. Le varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme. — Varietà Iacobiane.

Anzitutto secondo la nota relativa alla 3ª proprietà del simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ (cfr. § 1) nei seguenti enunciati si userà la parola *ipersuperficie* invece di forma.

Tenendo conto solo, per esser brevi, delle principali proprietà enunciate nel teorema III del § precedente mediante semplici interpretazioni geometriche si deduce:

Teorema IV. — *Siano* $A_0, A_1, \ldots, A_m$, $m+1$ *sistemi lineari generici proiettivi d'ipersuperficie dello spazio fondamentale* $[d]$ *dei rispettivi ordini* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *e della stessa dimensione* n. *Per fissare le idee il sistema* A_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ *sia individuato dalle ipersuperficie* $F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}$ *linearmente indipendenti e la proiettività tra i dati sistemi lineari sia definita col porre omologhe le ipersuperficie* $F_{0k}, F_{1k}, \ldots, F_{mk}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. *L'ipersuperficie* F_{ik} *sia poi dotata della molteplicità* $\eta_i + \theta_k$ *(essendo* η_i, θ_k *numeri interi positivi in parte anche nulli)* [1] *nel punto generico* Z^*, *e si chiami* $F_{ik}^{(\eta)}$ *il cono di ordine* $\eta_i + \theta_k$, *luogo delle tangenti in* Z^* *all'ipersuperficie* F_{ik}. *Quando è* $c = 0, 1, \ldots, \min(m, n)$, *le varietà omologhe di dimensione* $d - n + c - 1$ *(cioè le varietà sostegni dei sistemi lineari d'ipersuperficie di dimensione* $n - c$ *appartenenti ai sistemi lineari* (più ampî) $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *e corrispondenti nella data proiettività) generano una varietà* Φ_c, *di dimensione* $d - (m - c + 1)(n - c + 1)$ *e di ordine* $(m, n; c, c; p_0, p_1, \ldots, p_m; 0, 0, \ldots, 0)_c$, *varietà luogo dei punti* $\left[\frac{(m+n-\lambda-c+1)!}{(\lambda-c)!\,(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$ *(essendo* $\lambda = \min(m, n)$*) della* Φ_λ. *La* Φ_c *ha in generale nel punto* Z^* *la molteplicità* $(m, n; c, c; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)_c$ *e la varietà* $\Phi_c^{(\eta)}$ *luogo delle tangenti in* Z^* *alla* Φ_c *è la varietà di dimensione* $d - (m - c + 1)(n - c + 1)$ *e di ordine* $(m, n; c, c; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)_c$, *luogo dei punti* $\left[\frac{(m+n-\lambda-c+1)!}{(\lambda-c)!\,(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$

[1] Anche qui non si è assegnato esplicitamente il massimo numero delle η_i, o delle θ_k, uguali a zero per le stesse ragioni esposte nell'osservazioni relative al teorema III del § precedente.

della $\Phi_\lambda^{(\tau)}$, *varietà luogo delle tangenti in* Z^* *alla* Φ_λ; *onde la relazione di reciprocità, per le notazioni del § precedente, si può scrivere simbolicamente così:* $\Omega\Psi\Phi_\lambda = \Psi\Omega\Phi_\lambda$.

Se poi si suppongono nulle tutte le θ_k, *ed è nulla nessuna delle* η_i, *essendo il punto* Z^* *generico, è lecito ammettere che il gruppo delle* $(m+1)(n+1)$ *ipersuperficie* F_{ik} *sia stato scelto in modo, che* $F_{i0}^{(\tau)}, F_{i1}^{(\tau)}, \ldots, F_{in}^{(\tau)}$ *siano* $n+1$ *ipersuperficie linearmente indipendenti di un sistema lineare* $A_i^{(\tau)}$ *di dimensione* n *e che siano alla lor volta proiettivi i sistemi* $A_0^{(\tau)}, A_1^{(\tau)}, \ldots, A_m^{(\tau)}$, *essendo la proiettività definita col porre omologhe le* $F_{0k}^{(\tau)}, F_{1k}^{(\tau)}, \ldots, F_{mk}^{(\tau)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; *onde la* $\Phi_c^{(\tau)}$ *si può pensare come la varietà generata dalle varietà omologhe di dimensione* $d - n + c - 1$ *appartenenti ai sistemi lineari proiettivi* $A_0^{(\tau)}, A_1^{(\tau)}, \ldots, A_m^{(\tau)}$ (1).

Se invece sono nulle tutte le η_i *ed è nulla nessuna delle* θ_k, *essendo il punto* Z^* *generico, è lecito ammettere che il gruppo delle* $(m+1)(n+1)$ *ipersuperficie* F_{ik} *sia stato scelto in modo, che* $F_{0k}^{(\tau)}, F_{1k}^{(\tau)}, \ldots, F_{mk}^{(\tau)}$ *siano* $m+1$ *ipersuperficie linearmente indipendenti di un sistema lineare* $B_k^{(\tau)}$ *di dimensione* m, *e che siano alla lor volta proiettivi i sistemi* $B_0^{(\tau)}, B_1^{(\tau)}, \ldots, B_n^{(\tau)}$, *essendo la proiettività definita col porre omologhe le* $F_{i0}^{(\tau)}, F_{i1}^{(\tau)}, \ldots, F_{in}^{(\tau)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$; *onde la* $\Phi_c^{(\tau)}$ *si può pensare allora come la varietà generata dalle varietà omologhe di dimensione* $d - m + c - 1$ *appartenenti ai sistemi lineari proiettivi* $B_0^{(\tau)}, B_1^{(\tau)}, \ldots, B_n^{(\tau)}$.

Se d'altra parte $p_0 = p_1 = \ldots = p_m$, *allora risulta subito che la* Φ_c *è suscettibile di un'altra generazione proiettiva, cioè è il luogo generato dalle varietà omologhe di dimensione* $d - m + c - 1$, *appartenenti ai sistemi lineari proiettivi* $B_0, B_1, \ldots, B_n$, *essendo* B_k *il sistema lineare individuato dalle* $F_{0k}, F_{1k}, \ldots, F_{mk}$ *ed essendo la proiettività definita col porre omologhe le* $F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. *Se le* η_i *sono nulle e le* θ_k *sono tutte uguali tra loro, allora anche per la* $\Phi_c^{(\tau)}$ *esiste un'analoga doppia generazione proiettiva.*

Dai risultati ora esposti si trae (rispetto alle cosidette *varietà Iacobiane*).

Teorema V. — *Siano* $F_0, F_1, \ldots, F_m$ $m+1$ *ipersuperficie dello spazio fondamentale* $[d]$ *dei rispettivi ordini* $p_0+1, p_1+1, \ldots, p_m+1$, *passanti per un punto* Z^* *colle rispettive molteplicità* $\eta_0+1, \eta_1+1, \ldots, \eta_m+1$, *e inoltre* $F_i^{(\tau)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ *sia l'ipersuperficie luogo delle tangenti in* Z^* *alla* F_i, *allora il luogo dei punti per cui gli iperpiani polari rispetto alle* $F_0, F_1, \ldots, F_m$ *taglino un dato spazio* $[n]$ *secondo*

(1) Essendo nulle tutte le θ_k, nel caso particolare $c = \lambda = m$ l'ordine della $\Phi_c^{(\tau)}$ si trova in P. Lorenzola, *Sul luogo di un punto base comune a* $k+1$ *sistemi lineari di forme di dimensione* $h+1$ *corrispondenti in altrettanti sistemi lineari omografici di specie* $k+h+1$, Rend. Ist. Lombardo (2), 36, 4, 1903.

un $[r]$, *quando* $r \geq n - \lambda$ *dove* $\lambda = min\,(m, n)$, *è la varietà* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *di dimensione* $d - (r+1)(m-n+r+1)$ *e di ordine* $(d+m-n, d; d-r, d-r; p_0, p_1, \ldots, p_m, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0)_{d-r}$, *ossia* (¹) *di ordine* $(m, n; n-r, n-r; p_0, p_1, \ldots, p_m; 0, 0, \ldots, 0)_{n-r}$. *La* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *si suol chiamare la* $(\lambda - n + r + 1)^{sima}$ varietà Jacobiana *delle* $F_0, F_1, \ldots, F_m, F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$, *avendo indicato con* $F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$, $d-n$ *iperpiani (linearmente indipendenti) individuanti il dato spazio* $[n]$. *La* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *è il luogo dei punti* $\left[\frac{(r+m-\lambda+1)!}{(r-n+\lambda)!\,(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$ *della* J_1 *luogo dei punti per cui gli iperpiani polari rispetto alle* $F_0, F_1, \ldots, F_m$ *taglino il dato spazio* $[n]$ *secondo un* $[n-\lambda]$.

Se il punto Z^* *è un punto generico e quindi non giacente nel dato spazio* $[n]$, *allora la* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *ammette in esso una molteplicità* $(d+m-n, d; d-r, d-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0)_{d-r}$, *ossia* $(m, n; n-r, n-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; 0, 0, \ldots, 0)_{n-r}$; *il luogo* $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ *delle tangenti in* Z^* *alla* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *è di dimensione* $d-(r+1)(m-n+r+1)$ *e di ordine* $(m, n; n-r, n-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; 0, 0, \ldots, 0)_{n-r}$. *Tale varietà* $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ *è la* $(\lambda - n + r + 1)^{sima}$ *varietà Jacobiana della* $F^{(T)}_0, F^{(T)}_1, \ldots, F^{(T)}_m, F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$ *ed è quindi anche il luogo dei punti* $\left[\frac{(r+m-\lambda+1)!}{(r-n+\lambda)!\,(m+n-2\lambda+1)!}\right]^{upli}$ *della* $J^{(T)}_1$. *Si ha poi simbolicamente:* $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)} = \boldsymbol{\Omega\Psi} J_1 = \boldsymbol{\Psi\Omega} J_1$, *purchè alla c di* $\boldsymbol{\Psi}$ *si attribuisca il valore* $n-r$.

Se invece il punto Z^* *è un punto generico dello spazio* $[n]$, *allora la* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *ammette in esso la molteplicità* $(d+m-n, d; d-r, d-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, 0, 0 \ldots 0; 1, 0, \ldots, 0)_{d-r}$, *ossia* $(m, n; n-r, n-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; 1, 0, \ldots, 0)_{n-r}$, *e l'ordine della* $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ *luogo delle tangenti in* Z^* *alla* $J_{(\lambda-n+r+1)}$ *sarà quindi uguale a* $(m, n; n-r, n-r; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m; 1, 0, \ldots, 0)_{n-r}$ (²). *La* $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ *poi* non *è la* $(\lambda - n + r + 1)^{sima}$ *varietà Jacobiana delle* $F^{(T)}_0, F^{(T)}_1, \ldots, F^{(T)}_m, F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$, *ecc.*

(¹) Qui si applica più volte la proprietà: La funzione $(m, n; c, c; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$, quando è $o < c \leq min\,(m, n)$, $p_m = q_n = 0$, è identicamente uguale a $(m-1, n-1; c-1, c-1; p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}; q_0, q_1, \ldots, q_{n-1})_{c-1}$.

Per brevità si omette la dimostrazione; del resto è facile trovarla, quando si pensi che la funzione $(m, n; c, c; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$ si può scrivere sotto forma d'un conveniente determinante di ordine $(m+n-2c)$, tenendo conto della 1ª proposizione del § 7 della mia citata Memoria.

Nel seguito del presente Lavoro non si accennerà in quali luoghi occorra tener conto di questa proprietà della funzione $(m, n; c, c; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$.

(²) Questi risultati sulle varietà Jacobiane nel caso particolare $\lambda = m = n - r$ costituiscono un teorema della citata Nota del Lorenzola.

Osservazioni. — Per chiarir meglio alcune delle precedenti asserzioni bisogna ricorrere all'interpretazione analitica. Essendo $z_0, z_1, \ldots, z_d$ le coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale $[d]$ e indicando pure con $F_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, d + m - n)$ l'equazione della F_i, allora la $J_{(\lambda-n+r+1)}$ è rappresentata analiticamente coll'annullare tutti i minori di ordine $d - r + 1$ contenuti nella matrice di $d + m - n + 1$ linee e di $d + 1$ colonne $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\|$ $(i = 0, 1, \ldots, d + m - n; k = 0, 1, \ldots, d)$.

Indicando pure, per semplicità, con $z_0, z_1, \ldots, z_d$ le coordinate del punto Z^* e pensando le $y_0, y_1, \ldots, y_d$ come coordinate omogenee correnti di punto, allora, se si dà il primo caso, ossia se Z^* è un punto generico (e quindi non giacente nello spazio $[n]$), la $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ è rappresentata analiticamente coll'annullare tutti i minori di ordine $d - r + 1$ contenuti nella matrice $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$, dove col simbolo $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$ si è indicata la matrice $\left\| \nabla^{(y;z)}_{\eta_i} \frac{\partial F_i}{\partial z_k} \right\|$, ossia [1] $\left\| \frac{\partial}{\partial z_k} \nabla^{(y;z)}_{\eta_i} F_i \right\|$ $(i = 0, 1, \ldots, d + m - n \; ; \; k = 0, 1, \ldots, d)$, quando però si fa la convenzione di porre $\eta_{m+1} = \eta_{m+2} = \ldots = \eta_{d+m-n} = 0$.

Non vi è alcun dubbio che la $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ sia la $(\lambda - n + r + 1)^{sima}$ varietà Jacobiana delle $F^{(T)}_0, F^{(T)}_1, \ldots, F^{(T)}_m, F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$, perchè vale:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \nabla^{(y;z)}_{\eta_i+1} F_i = \frac{1}{(\eta_i + 1)!} \frac{\partial}{\partial y_k} [\Delta_{(y;z)}]^{\eta_i+1} F_i = \frac{1}{\eta_i!} [\Delta_{(y;z)}]^{\eta_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \Delta_{(y;z)} F_i =$$
$$= \nabla^{(y;z)}_{\eta_i} \frac{\partial}{\partial z_k} F_i .$$

Se invece si dà il 2° caso, cioè Z^* è un punto generico del dato spazio $[n]$, è lecito supporre che una delle $z_0, z_1, \ldots, z_d$ (coordinate di Z^*) p. es. la z_d per fissare le idee sia diversa da zero, e allora la $J^{(T)}_{(\lambda-n+r+1)}$ è rappresentata analiticamente (nelle coordinate correnti $y_0, y_1, \ldots, y_d$) coll'annullare tutti i minori di ordine $d - r + 1$ contenuti nella matrice $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F, \nabla F \right\|$, dove col simbolo $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F, \nabla F \right\|$ si è indicata la matrice ottenuta dalla $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$, quando in luogo degli elementi $\frac{\partial}{\partial z_d} \nabla^{(y;z)}_{\eta_0} F_0, \frac{\partial}{\partial z_d} \nabla^{(y;z)}_{\eta_1} F_1, \ldots,$

[1] Evidentemente $\nabla^{(y;z)}_{\eta_i} \frac{\partial F_i}{\partial z_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} \nabla^{(y;z)}_{\eta_i} F_i$, ove $\frac{\partial}{\partial z_k} \nabla^{(y;z)}_{\eta_i} F_i$ significa che si devono porre in luogo delle $z_0, z_1, \ldots, z_d$ i valori delle coordinate del punto Z^*, quando siano state eseguite le due operazioni, $\nabla^{(y;z)}_{\eta_i}, \frac{\partial}{\partial z_k}$ (in quest'ordine), pensando le $z_0, z_1, \ldots, z_d, y_0, y_1, \ldots, y_d$ come $2d + 2$ variabili indipendenti.

$\frac{\partial}{\partial z_d} \nabla^{(y;z)}_{\eta_m} F_m, \frac{\partial F_{m+1}}{\partial z_d}, \ldots, \frac{\partial F_{d+m-n}}{\partial z_d}$, appartenenti all'ultima colonna, si pongano rispettivamente $\nabla^{(y;z)}_{\eta_0+1} F_0, \nabla^{(y;z)}_{\eta_1+1} F_1, \ldots, \nabla^{(y;z)}_{\eta_m+1} F_m, 0, \ldots, 0$ (1). Quindi la $J^{(\tau)}_{(\lambda-n+r+1)}$, come si è sopra asserito, non è la $(\lambda - n + r + 1)^{sima}$ varietà Jacobiana delle $F^{(\tau)}_0, F^{(\tau)}_1, \ldots, F^{(\tau)}_m, F_{m+1}, \ldots, F_{d+m-n}$, perchè, chiamando (sempre nell'ipotesi che Z^* sia un punto generico del dato spazio $[n]$) $J'_{(\lambda-n+r+1)}$ la varietà rappresentata (nelle coordinate correnti $y_0, y_1, \ldots, y_d$) coll'annullare tutti i minori di ordine $d - r + 1$ contenuti nella matrice $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$, risulta che la $J'_{(\lambda-n+r+1)}$ è una varietà di dimensione $d - r(m - n + r - 1)$, osservando che la $J'_{(\lambda-n+r+1)}$ si può definire anche la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $d - r + 1$ contenuti nella matrice di $d + m - n + 1$ linee e di d colonne ottenuta dalla $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$ togliendo gli elementi dell'ultima colonna.

Fisica. — *Sull'effetto fotoelettrico del Selenio.* Nota del dott. Camillo Carpini, presentata dal Corrispondente Sella.

1. Molti sperimentatori hanno ricercato l'influenza della temperatura sulla resistenza del Selenio, sia all'oscuro, sia esposto alla luce. Così l'Hittorf (2) notava che la resistenza del Selenio va continuamente diminuendo col crescere della temperatura fino a 210° oltre il quale punto aumentava bruscamente. Draper e Moss (3) dimostrarono che non sempre questa legge è verificata; che cioè esistono anche alcune varietà di Selenio in cui la resistenza aumenta coll'aumentare della temperatura. Conclusioni analoghe trassero dalle loro ricerche il Siemens (4), il Mercadier (5), il Bidwell (6), il Pochettino (7)

(1) Questa rappresentazione analitica della $J^{(\tau)}_{(\lambda-n-r+1)}$ si può ottenere facilmente, quando per mezzo di considerazioni algebriche e analitiche si trasformino in determinanti l'espressioni, che si ricavano applicando l'operazione $\Delta_{(y;z)}$ a quei minori di ordine $d - r + 1$ appartenenti alla matrice $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$, che contengono elementi dell'ultima colonna di questa matrice $\left\| \frac{\partial}{\partial z} \nabla F \right\|$.

(2) Pogg. Ann., t. LXXXIV, pag. 214.

(3) Proc. roy. irish. Ac., 1873: *Nature*, 1875.

(4) Pogg. Ann., 159, 117, 1876.

(5) Journal de Physique, 1904.

(6) Phil. Mag., 31, 251, 1891.

(7) Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1902, pag. 286.