ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Mettons dans (24) $x = 1$, il résulte la fraction continue de M. J. Tannery, tandis que l'hypothèse $\nu = 0$ nous conduira à celle que Laguerre a déduite pour le logarithme-intégral. Remarquons encore que l'hypothesè $\nu = \frac{1}{2}$ donnera immédiatement la fraction continue pour la fonction $\mathrm{L}(x)$ mentionnée par Laguerre.

Posons ensuite

$$x^n g_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi'_n(x) \quad , \quad x^{n+1} f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi'_n(x), \tag{25}$$

il résulte cette valeur limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi'_n(x)}{\psi'_n(x)} = e^x x^{-\nu} \cdot \mathrm{Q}(x, \nu), \tag{26}$$

tandis que la formule (20) donnera ces deux autres

$$\varphi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \varphi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \varphi'_{n-2}(x)$$
$$\psi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \psi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \psi'_{n-2}(x),$$

d'où cette autre fraction continue

$$\left\{ \mathrm{Q}(x, \nu) = \cfrac{e^{-x} \cdot x^\nu}{x + \cfrac{(1-\nu)x}{x + 1 - \cfrac{1 \cdot (2-\nu)x}{x + 2 - \nu - \cfrac{2 \cdot (3-\nu)}{x + 4 - \nu - \cfrac{3 \cdot (4-\nu)}{x + 6 - \nu - \cdots}}}}} \right. \tag{27}$$

qui semble être nouvelle.

Il est évident que la fraction continue (27), convergente pour ν *réel* et x *positif*, nous permet de déduire immédiatement des fractions continues pour les deux fonctions $\mathrm{L}(x)$ et $li(e^{-x})$, analogues à celle de Laguerre.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un ellissoide elastico.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente C. SOMIGLIANA.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice per determinare, nel campo racchiuso da un ellissoide, tre funzioni che verificano un certo sistema di tre equazioni indefinite di secondo ordine, e di tre equazioni ai limiti di primo ordine.

Come casi particolari si ottiene l'integrazione delle equazioni dell'equilibrio di un ellissoide elastico, soggetto a tensioni date, agenti sul contorno, nel caso in cui le componenti delle tensioni siano il prodotto di polinomi di un grado qualunque, per la distanza del centro dell'ellissoide dal piano tangente; ovvero l'integrazione delle equazioni di un ellissoide elastico, soggetto a riscaldamento, supponendo che il riscaldamento sia rappresentato da un polinomio.

1. Consideriamo il campo S racchiuso dall'ellissoide σ di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\,, \tag{1}$$

e denotiamo con P la distanza del centro di σ dal piano tangente in un punto qualunque $(x\,,y\,,z)$ di σ, con n la normale a σ diretta all'interno di S.

Indichiamo poi, per brevità, genericamente con Δ_{rs} un'operazione differenziale lineare, omogenea di 2° ordine, della forma:

$$\Delta_{rs}=a_{rs}\frac{d^2}{dx^2}+b_{rs}\frac{d^2}{dy^2}+c_{rs}\frac{d^2}{dz^2}+h_{rs}\frac{d^2}{dx\,dy}+k_{rs}\frac{d^2}{dx\,dz}+l_{rs}\frac{d^2}{dy\,dz}\,,$$

ove $a_{rs}\,,b_{rs}\ldots l_{rs}$ sono coefficienti costanti conosciuti, e con D_{rs} un'espressione lineare, omogenea di 1° ordine della forma:

$$D_{rs}=\alpha_{rs}\frac{d\xi}{dx}+\alpha'_{rs}\frac{d\xi}{dy}+\alpha''_{rs}\frac{d\xi}{dz}+\beta_{rs}\frac{d\eta}{dx}+\beta'_{rs}\frac{d\eta}{dy}+\beta''_{rs}\frac{d\eta}{dz}+$$
$$+\gamma_{rs}\frac{d\zeta}{dx}+\gamma'_{rs}\frac{d\zeta}{dy}+\gamma''_{rs}\frac{d\zeta}{dz}\,,$$

in cui $\alpha_{rs}\,,\alpha'_{rs}\,,\ldots,\gamma''_{rs}$ sono coefficienti costanti dati e $\xi\,,\eta\,,\zeta$ funzioni incognite.

Ciò posto, cerchiamo tre funzioni $\xi\,,\eta\,,\zeta$, regolari in S, che verifichino in S le equazioni indefinite:

$$\left\{\begin{aligned}\Delta_{11}\xi+\Delta_{12}\eta+\Delta_{13}\zeta&=0\\ \Delta_{21}\xi+\Delta_{22}\eta+\Delta_{23}\zeta&=0\\ \Delta_{31}\xi+\Delta_{32}\eta+\Delta_{33}\zeta&=0\,,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

e nei punti di σ le equazioni ai limiti:

$$\left\{\begin{aligned}D_{11}\frac{dx}{dn}+D_{12}\frac{dy}{dn}+D_{13}\frac{dz}{dn}&=F\cdot P\\ D_{21}\frac{dx}{dn}+D_{22}\frac{dy}{dn}+D_{23}\frac{dz}{dn}&=G\cdot P\\ D_{31}\frac{dx}{dn}+D_{32}\frac{dy}{dn}+D_{33}\frac{dz}{dn}&=H\cdot P\,,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

ove F , G , H sono funzioni regolari date.

Supporremo ancora che le costanti $a_{rs}\,,\ldots,l_{rs}\,,\ldots,\alpha_{rs}\,,\ldots,\gamma''_{rs}$ siano tali che i sistemi (2), (3) non ammettano più di una soluzione, cioè, in altri termini, che se le funzioni F , G , H sono nulle in ogni punto di σ, le funzioni $\xi\,,\eta\,,\zeta$ siano identicamente nulle in ogni punto di S.

È noto intanto che i coseni degli angoli che la normale interna all'ellissoide fa cogli assi coordinati sono dati da:

$$(4)\qquad \frac{dx}{dn} = -\frac{x}{a^2}\,\mathrm{P}\,, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{y}{b^2}\,\mathrm{P}\,, \quad \frac{dz}{dn} = -\frac{z}{c^2}\,\mathrm{P},$$

perciò dalle (3) si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{11}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{12}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{13}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{F} \\ \mathrm{D}_{21}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{22}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{23}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{G} \\ \mathrm{D}_{31}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{32}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{33}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{H}\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sussistono nei punti di σ, per conseguenza, nel campo S, si può porre:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}_{11}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{12}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{13}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{F} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot \lambda(x\,,y\,,z) \\ \mathrm{D}_{21}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{22}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{23}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{G} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot \mu(x\,,y\,,z) \\ \mathrm{D}_{31}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{32}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{33}\dfrac{z}{c^2} = -\,\mathrm{H} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot \nu(x\,,y\,,z), \end{cases}$$

essendo $\lambda\,,\mu\,,\nu$ tre funzioni regolari nei punti di S.

2. Supponendo ora che F , G , H siano polinomi di grado m, cioè siano esprimibili mediante le formole:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{F} = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{A}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \mathrm{G} = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{B}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ \mathrm{H} = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{C}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t\,, \end{cases}$$

le A , B , C essendo coefficienti costanti dati, è facile dimostrare che anche le funzioni $\xi\,,\eta\,,\zeta$ saranno polinomi di grado m.

Infatti esprimiamo $\xi\,,\eta\,,\zeta$ colle formole:

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, a_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \eta = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, b_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ \zeta = \sum_0^m{}_{r,s,t}\, c_{r,s,t}\, x^r y^s z_t\,, \end{cases}$$

ove a, b, c sono coefficienti costanti da determinarsi, ed assumiamo λ, μ, ν, che saranno in conseguenza polinomi di grado $m-2$, sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \sum_0^{m-2}{}_{r,s,t}\, \alpha_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \mu &= \sum_0^{m-2}{}_{r,s,t}\, \beta_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad\qquad (r+s+t \leq m-2) \\ \nu &= \sum_0^{m-2}{}_{r,s,t}\, \gamma_{r,s,t}\, x^r y^s z^t , \end{aligned}\right.$$

le α, β, γ indicando altri coefficienti da determinarsi.

Sostituendo i valori precedenti nelle (2), (5) si hanno tre equazioni di grado m, e tre equazioni di grado $m-2$ nelle variabili x, y, z; perciò identificando nei due membri di ognuna di esse i coefficienti dei termini simili si hanno complessivamente:

$$\mathrm{N} = 3\binom{m+3}{3} + 3\binom{m+1}{3}$$

equazioni lineari fra i coefficienti $a_{r,s,t}, \dots, \alpha_{r,s,t}, \dots, \gamma_{r,s,t}$, che in tutto sono evidentemente pure in numero di N.

Abbiamo dunque un sistema $\sum$ di N equazioni lineari con N incognite: queste equazioni saranno poi compatibili, cioè il determinante dei loro coefficienti sarà certamente diverso da zero; poichè, nel caso contrario, attribuendo alle costanti A, B, C il valore zero (ossia, a tenore delle (6), ritenendo nulle le funzioni F, G, H) le equazioni di $\sum$ diventerebbero omogenee, e allora sarebbero soddisfatte da valori non tutti nulli delle incognite, e perciò esisterebbero tre funzioni ξ, η, ζ, non nulle in S, e che verificherebbero le (2), (3) nel caso in cui $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{H} = 0$: e ciò contraddice all'ipotesi fatta nel § 1 circa i sistemi (2), (3).

Dal sistema $\sum$ potremo dunque ricavare le incognite $a_{r,s,t}, \dots, \gamma_{r,s,t}$, e in tal modo risulteranno note, mediante le (7), le funzioni ξ, η, ζ che risolvono la questione proposta.

È chiaro che il precedente metodo d'integrazione può applicarsi al caso di quante si vogliano variabili, e anche nell'ipotesi che l'equazione dell'ellissoide, anzichè sotto la forma (1), sia data sotto la forma più generale.

3. Supponiamo ora che lo spazio S sia occupato da un corpo elastico isotropo, sul contorno del quale agiscano delle tensioni, le cui componenti siano date da:

$$\mathrm{F}\cdot\mathrm{P} \quad , \quad \mathrm{G}\cdot\mathrm{P} \quad , \quad \mathrm{H}\cdot\mathrm{P},$$

ove F, G, H sono polinomi noti di grado m.

Indicando con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento di un punto qualunque di S, dovranno essere soddisfatte in S le equazioni indefinite:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_2\xi + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{d\theta}{dx} = 0 \\ &\Delta_2\eta + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{d\theta}{dy} = 0 \\ &\Delta_2\zeta + \frac{1}{1-2\varkappa}\frac{d\theta}{dz} = 0, \end{aligned}\right. \qquad \left(\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \\ \theta &= \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \end{aligned}\right)$$

e sopra σ le equazioni ai limiti:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{dx}{dn} + \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right)\frac{dy}{dn} + \\ &\qquad + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\frac{dz}{dn} = -\frac{2(1+\varkappa)}{\mathrm{E}}\mathrm{F}\cdot\mathrm{P} \\ &\left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right)\frac{dx}{dn} + \left(\frac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\frac{d\eta}{dy}\right)\frac{dy}{dn} + \\ &\qquad + \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)\frac{dz}{dn} = -\frac{2(1+\varkappa)}{\mathrm{E}}\mathrm{G}\cdot\mathrm{P} \\ &\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\frac{dx}{dn} + \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right)\frac{dy}{dn} + \\ &\qquad + \left(\frac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\frac{d\zeta}{dz}\right)\frac{dz}{dn} = -\frac{2(1+\varkappa)}{\mathrm{E}}\mathrm{H}\cdot\mathrm{P}, \end{aligned}\right.$$

ove $\varkappa$, E sono costanti.

Dalle (8), (9) si deduce facilmente, com'è noto, che debbono essere soddisfatte le equazioni, che esprimono del resto condizioni d'equilibrio:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \mathrm{FP}\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{GP}\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{HP}\,d\sigma = 0, \\ &\int_\sigma (y\mathrm{F} - x\mathrm{G})\,\mathrm{P}d\sigma = \int_\sigma (z\mathrm{F} - x\mathrm{H})\,\mathrm{P}d\sigma = \int_\sigma (z\mathrm{G} - y\mathrm{H})\,\mathrm{P}d\sigma = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Poichè le (8), (9) sono un caso particolare delle (2), (3) ed è inoltre soddisfatta la condizione della unicità della soluzione, si conclude che per determinare le funzioni ξ, η, ζ basterà applicare il procedimento esposto nei paragrafi precedenti (1), e così si avrà la deformazione dell'ellissoide considerato (2).

(1) Le funzioni ξ, η, ζ risultano notoriamente determinate a meno di *sei* costanti, le quali corrispondono ad una traslazione e ad una rotazione del corpo, e poichè pure *sei* sono le equazioni (10), si conclude che nel sistema di equazioni lineari, corrispondente al sistema Σ, potremo omettere *sei* equazioni.

(2) Dal risultato ora stabilito appare l'utilità — mi dice il prof. Somigliana — di indagare se, e sotto quali condizioni, sia possibile rappresentare delle tensioni, date arbi-

La deformazione di un ellissoide nel caso in cui sul contorno si conoscono gli spostamenti, che siano espressi da polinomi, trovasi determinata in una mia Nota precedente (¹); nel caso di un ellissoide di rotazione, e per spostamenti qualunque, la deformazione è stata determinata dal professore Tedone (²).

4. Supponiamo ora che il solido elastico isotropo S venga deformato per effetto del calore, e che inizialmente esso sia soggetto in ogni punto alla stessa temperatura.

Considerando allora un punto qualunque (x, y, z) di S e chiamando u, v, w le componenti dello spostamento di esso e Φ il riscaldamento a cui, in quel punto, si assoggetta il solido, dovranno essere soddisfatte, nei punti di S, le equazioni indefinite (³):

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta_2 u + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dx} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dx} \\ \Delta_2 v + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dy} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dy} \\ \Delta_2 w + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dz} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dz}, \end{cases} \qquad \left(p = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

ove $\varkappa, \varkappa'$ sono costanti che dipendono dalla natura del solido.

Sulla superficie σ devono poi essere verificate le equazioni ai limiti:

$$(12)\quad \begin{cases} \left(p' + 2\dfrac{du}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dv}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dw}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \end{cases}$$

ove:

$$p' = 2\varkappa p - \varkappa'\Phi.$$

---

trariamente sul contorno dell'ellissoide, nella forma di somme di polinomi moltiplicati per il fattore P.

(¹) Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche*, ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(²) Tedone, *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905).

(³) Cfr. Borchardt, *Gesammelte Werke*, pag. 250 (Berlin, a. 1888), ovvero: Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità*, cap. XV (Torino, a. 1894).

Conviene ridurre le (11) a forma omogenea. Poniamo perciò:

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \xi + \dfrac{dF}{dx} \\ v = \eta + \dfrac{dF}{dy} \\ w = \zeta + \dfrac{dF}{dz}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

ove ξ, η, ζ, F sono funzioni da determinarsi; le (11) diventano allora:

$$(11')\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d}{dx}[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 F] \\ \Delta_2 \eta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d}{dy}[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 F] \\ \Delta_2 \zeta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{d}{dz}[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 F], \end{cases}$$

e se poi si determina la F in modo che sia verificata l'equazione:

$$(14)\qquad \Delta_2 F = \frac{\varkappa'}{2(1+\varkappa)}\Phi$$

e sia regolare in S, le (11') si ridurranno alla forma omogenea:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eseguendo la sostituzione (13) le (12) diventano:

$$\begin{cases} \left(2\varkappa\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = \\ \qquad = (\varkappa'\Phi - 2\varkappa\Delta_2 F)\dfrac{dx}{dn} - 2\left(\dfrac{d^2F}{dx^2}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{d^2F}{dx\,dz}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

od ancora, ricordando la (14) e le (4):

$$(16)\qquad \begin{cases} \left(2\varkappa\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = \\ \qquad = \left[\left(2\dfrac{d^2F}{dx^2} - \dfrac{\varkappa'}{1+\varkappa}\Phi\right)\dfrac{x}{a^2} + 2\dfrac{d^2F}{dx\,dy}\dfrac{y}{b^2} + 2\dfrac{d^2F}{dx\,dz}\dfrac{z}{c^2}\right]P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supponendo ora che il riscaldamento Φ sia un polinomio dato di grado m, potremo determinare un polinomio F, di grado $m+2$, che verifichi la (14) [1], e allora nelle (16) le espressioni entro le parentesi quadre risultano polinomi di grado $m+1$, perciò la ricerca delle funzioni ξ, η, ζ, che saranno pure polinomi di grado $m+1$, si può fare col procedimento adoperato per i sistemi (8), (9).

5. Come è già stato detto, le considerazioni dei §§ 1, 2 valgono per un numero qualunque di variabili: in particolare, per 2 variabili, permettono di determinare la deformazione di una piastra elastica, isotropa, piana, infinitamente sottile, non soggetta a forze di massa, e il cui contorno sia sollecitato da tensioni date, agenti nel piano della piastra, supponendo che le componenti di dette tensioni siano eguali al prodotto di un polinomio, di un grado qualunque m, per la distanza del centro dell'ellisse dalla tangente nel punto considerato.

Questa questione può però esser trattata, togliendo anche la restrizione ora posta circa le componenti della tensione, con un altro procedimento: infatti essa equivale [2] a quella di costruire la funzione biarmonica U nell'area considerata, conoscendo sul suo contorno i valori della U e della sua derivata normale. E poichè la determinazione della funzione U, nel caso dell'ellisse, si sa fare [3], si conclude che si saprà anche determinare la deformazione della piastra ellittica.

Fisica. — *Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana)* [4]. Nota del dott. G. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

In questa Comunicazione riporto i risultati ottenuti dallo studio della radioattività dei fanghi e delle acque termali dei Bagni di Lucca. Lo studio fu già cominciato sul luogo, ove mi recai per incarico del prof. Ubaldo Antony. Al prof. Antony vadano quindi i miei ringraziamenti; così pure vadano al cav. dott. Adriano Bastiani per aver messo a mia disposizione il locale ed il materiale di studio. Degli stabilimenti da me visitati ricordo:

[1] Di questi polinomi ne esistono infiniti; si può ad esempio assumere quello che si annulla su σ e che si può ottenere facilmente come è mostrato nella mia Nota dell'Istituto Veneto già citata.

[2] Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIII, 2° sem. (1904); Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche* (Id., vol, XIV, 1° sem. 1905).

[3] Boggio, *Integrazione dell'equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$ in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

[4] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica della R. Università di Pisa.