

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. BATTELLI.

La resistenza elettrica dei conduttori metallici non è fisicamente determinata se non quando sia preventivamente assegnata la legge con cui la corrente elettrica si distribuisce nei vari punti del conduttore medesimo.

Tale distribuzione varia notevolmente col variare del carattere della corrente; ma la legge che sovrasta a siffatte variazioni non si conosce bene se non nel caso di un ordinario conduttore rettilineo a sezione circolare.

Questo caso si presenta assai di rado nelle ricerche sperimentali, dove il più delle volte si richiede che il circuito abbia una considerevole energia magnetica, e si adoperano perciò conduttori avvolti a solenoidi. Per tali conduttori, in un precedente lavoro ⁽¹⁾ da me pubblicato insieme col dott. Magri, abbiamo avuto occasione di osservare che la distribuzione della corrente nello spessore del filo differisce moltissimo da quella che vale per i conduttori medesimi distesi in linea retta.

Noi ci siamo accorti di ciò facendo passare delle correnti di alta frequenza attraverso un solenoide ed un conduttore rettilineo disposti in serie; si misurava le quantità di calore che si svolgevano nei due conduttori e il loro rapporto ci esprimeva il rapporto fra le resistenze elettriche dei conduttori per quelle date correnti.

Si trovò costantemente che per correnti oscillatorie la resistenza di un solenoide, fatto con un filo di spessore non estremamente piccolo, è sempre maggiore di quella che avrebbe lo stesso filo se fosse disteso in linea retta; la differenza cresce col crescere della frequenza delle correnti, ed è tanto più rilevante quanto maggiore è lo spessore del filo e quanto più piccolo è il passo della spirale.

Se ne concluse che, mentre in un conduttore rettilineo le correnti alterate non passano che per un sottile strato superficiale, quando lo stesso conduttore è avvolto a spirale viene accresciuta la porzione di conduttore che non prende parte al passaggio delle correnti, ossia viene ancor più diminuita la sezione utile del conduttore.

Posteriormente i nostri risultati sono stati confermati dal Dolazelek ⁽²⁾, il quale indipendentemente dalle nostre osservazioni, occupandosi di misure di coefficienti di autoinduzione di alcuni rocchetti per correnti della frequenza di 300 oscillazioni per secondo, notò che la resistenza di tali rocchetti era

⁽¹⁾ Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 2, 51, pag. 371, 1902.

⁽²⁾ Ann. d. Phys., 12, pag. 1142, 1903.

maggiora di quella che essi presentavano per correnti continue, ed attribuì questo aumento a correnti di Foucault ed a difetti di uniformità della distribuzione della corrente nella sezione del filo.

Più tardi il Wien ⁽¹⁾ discutendo i risultati del Dolazelek mostrò che, conformemente a ciò che era stato già da noi stabilito, questi aumenti di resistenza non erano attribuibili a difetti di uniformità calcolabili in base alle leggi già note per i conduttori rettilinei.

Egli stesso propose un'interpretazione teorica dei risultati del Dolazelek, e le sue formule finali concordano assai bene con le esperienze, purchè queste siano fatte con rocchetti a parecchi strati di filo; lo dimostrano le misure fatte a tal uopo dal Dolazelek, le quali sono state spinte fino a frequenza di 3000 alternanze per secondo.

Il caso di un solenoide ad un solo strato di spire — caso importantissimo per la pratica, specialmente quando, lavorando con correnti di alta tensione, è soprattutto necessario non compromettere il buon isolamento fra le varie parti dello stesso conduttore — è stato trattato a parte dal Wien; egli è venuto alla conclusione che la resistenza R per correnti di frequenza N è data da una serie del tipo

$$(1) \quad R = R_0 + aN^2 - bN^4 - cN^6 - \dots$$

dove R_0 è la resistenza per correnti continue, a, b, c, \dots sono costanti che dipendono dallo spessore del filo e dal passo del solenoide.

Il calcolo effettivo di tali costanti è molto laborioso, tanto che il Wien stesso si è contentato di trovare soltanto il valore della prima di esse: ciò costituisce un primo inconveniente della trattazione del Wien, tanto più che per alti valori di N , specialmente se la grossezza del filo non è molto piccolo, la serie (1) converge così lentamente che si deve assolutamente rinunciare a calcolare R , sia pure con approssimazione molto grossolana. Infatti il Wien applicando il suo calcolo ad un solenoide fatto con un filo di rame della grossezza di 2 mm. e del passo di 2,12 mm. trovò risultati molto discordanti con l'esperienza; ed invero i valori da lui calcolati per le variazioni di resistenza che avrebbero dovuto manifestarsi nel solenoide — quando in esso alla corrente continua si sostituiscono correnti alternate di frequenza variabile fra 4000 e 8000 alternanze per secondo — risultarono quasi il doppio di quelli che forniscono direttamente le esperienze.

Indipendentemente da questo inconveniente, che fu rilevato dal Wien stesso, la serie (1) non può fornire un valore sufficientemente esatto di R , perchè nei ragionamenti fatti dal Wien per stabilirla è supposto implicitamente che la distribuzione della corrente nella sezione del filo sia uniforme in tutti i punti che si trovano alla stessa distanza dall'asse del solenoide,

(1) Ann. d. Phys., 14, pag. 1, 1904.

cioè sopra i punti di un cilindro coassiale col solenoide. Infatti il Wien immagina il solenoide scomposto in sottili solenoidi elementari con tagli fatti mediante superficie cilindriche coassiali, due delle quali sono rappresentate in sezione dalle due rette AB infinitamente vicine (fig. 1), ed ammette che, indicando con r il raggio medio CD della spirale, con x_1 ed $x_1 + dx_1$ le distanze delle due rette AB dal centro D della sezione, con 2ϱ lo spessore del filo e con σ la resistenza specifica del conduttore, la resistenza di m spire di tale solenoide elementare sia data da

$$\sigma m \frac{2\pi(r + x_1)}{2\sqrt{\varrho^2 - x_1^2} \times dx_1},$$

cioè, dalla stessa espressione che rappresenta la resistenza di quel solenoide elementare per correnti continue.

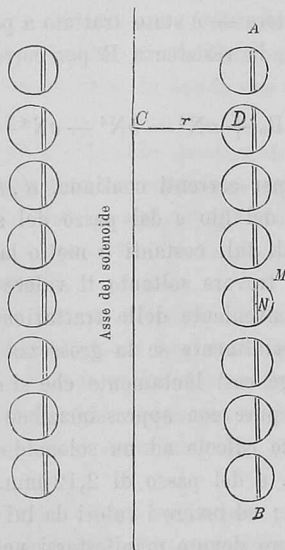


FIG. 1.

Ora è presumibile che, come nel caso di un conduttore rettilineo la corrente tende a localizzarsi alla superficie del conduttore, così pure nel caso presente la densità della corrente sia maggiore nei punti M, che sono in prossimità della superficie del conduttore, anzichè in quelli N, che sono nell'interno, ossia che anche nel caso di un solenoide si presenti, oltre al fenomeno studiato dal Wien, un fenomeno analogo allo *skineffekt* dei conduttori rettilinei; per effetto di esso la resistenza dei solenoidi elementari con-

siderati dal Wien non può ritenersi come una quantità indipendente dalla frequenza delle correnti. L'ipotesi del Wien richiederebbe che il campo magnetico avesse lo stesso valore sia in N che in M, ossia che in questi due punti M ed N fosse trascurabile il campo magnetico H_1 dovuto alla corrente che circola soltanto nella spira a cui appartiene M, rispetto al campo magnetico H dovuto all'intero solenoide. Ora si ha approssimativamente per H il valore

$$H = \frac{4\pi mi}{c},$$

dove m è il numero delle spire, c la lunghezza del solenoide ed i l'intensità della corrente.

Invece per H_1 , facendo astrazione dalla non uniformità della distribuzione della corrente nella sezione del conduttore, si ha nei punti posti come M alla superficie del conduttore

$$H_1 = \frac{2i}{\rho},$$

e quindi

$$\frac{H_1}{H} = \frac{c}{2\pi m\rho}.$$

Ora, non essendo mai le spire in contatto le une con le altre, si ha che il diametro del conduttore è minore del passo della spirale, ossia

$$2\rho < \frac{c}{m},$$

e quindi

$$\frac{H_1}{H} = \frac{1}{2\rho} \frac{c}{\pi m} > \frac{m}{c} \frac{c}{\pi m}$$

cioè

$$\frac{H_1}{H} > \frac{1}{\pi};$$

si vede da ciò che non è affatto lecito trascurare H_1 rispetto ad H.

Per queste ragioni la trattazione del Wien non risolve affatto il problema della determinazione della resistenza di un solenoide per correnti di alta frequenza.

Più recentemente il Sommerfeld (1) ha ripreso lo stesso problema, passando dal caso dei solenoidi usuali formati da spire distinte l'una dall'altra, a quello di un solenoide ideale costituito da un tubo vuoto internamente e in cui la corrente sia obbligata a descrivere linee circolari aventi per asse

(1) Ann. d. Phys., 15, pag. 673, 1904.

l'asse del tubo; tale solenoide potrebbe in certo modo essere realizzato con un filo a sezione rettangolare anzichè circolare, avvolgendo tale filo sopra un tubo isolante in modo che ogni spira stia quasi a contatto con quelle adiacenti.

Il Sommerfeld suppone addirittura ridotto a zero lo spazio compreso tra una spira e l'altra, ammette che nello spazio compreso fra le due superficie cilindriche fra cui è compreso il tubo esistano da per tutto, il campo magnetico, la densità della corrente e le loro derivate prime e seconde rispetto agli assi coordinati, ed applica a queste quantità le note equazioni di Maxwell facendo astrazione dalle correnti di spostamento.

Se si tiene presente che in questo caso le linee di forza magnetica sono rette parallele al tubo e le linee di corrente sono cerchi coassiali col tubo, mentre nel caso dei conduttori rettilinei si ha proprio la disposizione inversa, si capisce che, essendo d'altra parte le equazioni del Maxwell di aspetto simmetrico rispetto al campo magnetico ed alla densità della corrente elettrica, l'integrazione delle equazioni relative al caso di questo solenoide debba potersi fare, scambiando i simboli, con funzioni analoghe a quelle che servono per i conduttori rettilinei; e difatti il Sommerfeld, analogamente al noto risultato ottenuto dal Thomson nel cercare l'espressione della densità della corrente, trova che l'espressione generale del campo magnetico in un punto qualsiasi è una combinazione lineare ed omogenea delle due funzioni di Bessel di ordine zero ed il cui argomento è proporzionale al prodotto della distanza del punto dall'asse della spirale, per la frequenza delle correnti e per la resistenza specifica del conduttore.

Servendosi di sviluppi approssimati delle funzioni di Bessel, egli calcola la resistenza per alte e per basse frequenze di una porzione anulare del tubo (fig. 2) compresa fra due piani AB, CD, la cui distanza sia uguale alla grossezza delle pareti del tubo; tale porzione costituisce perciò una spira a sezione quadrata.

La resistenza di tale spira cresce colla frequenza, perchè la corrente tende ad invadere solo la parte della spira più vicina all'asse del solenoide, ed il Sommerfeld volle confrontare tali variazioni calcolate con quelle che risultano dalle nostre esperienze e da quelle del Wien. Per stabilire il confronto egli immagina le nostre spire a sezione circolare sostituite con spire a sezione quadrata con sezione di eguale area, ma trova che il valore calcolato risulta sempre assai diverso da quello misurato (il primo risulta quasi doppio del secondo).

La giustificazione che egli indica per tale discordanza è la seguente che: « der quadratische Querschnitt bietet auch bei gleichem Flächeninhalt dem nach der Innenseite konzentrierten Strom *mehr* Fläche dar als der kreisförmige (fig. 3). Die Wärmeentwicklung und daher auch die Widerstandserhöhung wird somit bei der in der Rechnung zugrunde gelegten Querschnittsform grosser (!) sein, als bei der Messung ». A me pare che qui il

Sommerfeld sia caduto in una svista; la ragione da lui addotta conduce proprio alla conseguenza opposta di quella a cui egli vorrebbe arrivare, essendo logico che con l'aumentare della sezione debba diminuire anzichè aumentare la resistenza del conduttore.

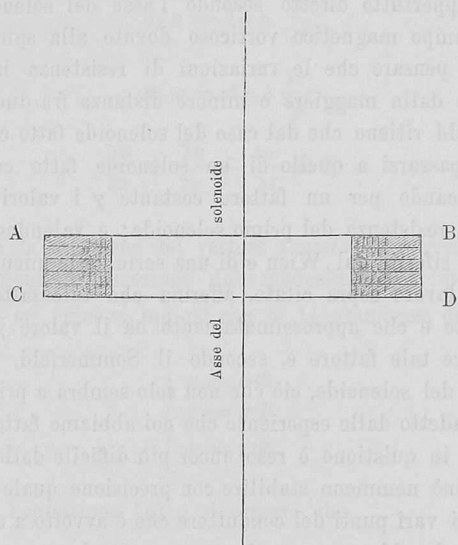


FIG. 2.

Certamente è inoppugnabile che la ragione delle discordanze tra i risultati del Sommerfeld e le esperienze debba ritrovarsi nel fatto che un

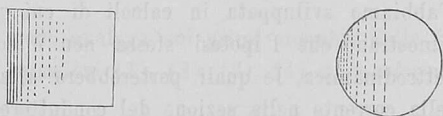


FIG. 3.

ordinario solenoide fatto con filo a sezione circolare, si comporta differentemente che un solenoide del genere di quelli considerati dal Sommerfeld costruibile con filo a sezione quadrata ed a spire ciascuna in contatto con le due adiacenti; la sola condizione che i fili dei due solenoidi abbiano sezioni di uguale area è infatti insufficiente a legittimare la supposta identità di comportamento dei due solenoidi.

Ma oltre alla differenza di forma delle due sezioni, si deve qui tener presente che nel caso di un ordinario solenoide due altre circostanze complicano il fenomeno; infatti non solo — come si è già dovuto osservare a proposito del lavoro del Wien — viene a mancare l'ipotesi fondamentale ammessa dal Sommerfeld, cioè che in vicinanza di ciascuna spira il campo magnetico sia dappertutto diretto secondo l'asse del solenoide e sia perciò trascurabile il campo magnetico vorticoso dovuto alla spira medesima, ma è anche naturale pensare che le variazioni di resistenza in istudio devono essere influenzate dalla maggiore o minore distanza fra due spire adiacenti.

Il Sommerfeld ritiene che dal caso del solenoide fatto con filo a sezione quadrata, possa passarsi a quello di un solenoide fatto con filo a sezione circolare moltiplicando per un fattore costante γ i valori da lui calcolati come aumenti di resistenza del primo solenoide; e valendosi di pochi risultati sperimentali riferiti dal Wien e di una serie delle misure calorimetriche da noi fatte nel lavoro sopra citato, afferma che tale fattore può ritenersi realmente costante e che approssimatamente ha il valore $\gamma = 0,6$.

In particolare tale fattore è, secondo il Sommerfeld, indipendente dal valore del passo del solenoide, ciò che non solo sembra a priori molto strano, ma è anche contraddetto dalle esperienze che noi abbiamo fatto in proposito (1).

Il problema in questione è reso ancor più difficile dalla circostanza che a priori non si può nemmeno stabilire con precisione quale sia la direzione della corrente nei vari punti del conduttore che è avvolto a solenoide. Infatti si concepisca il solenoide come se fosse generato da un cerchietto di sezione uguale a quella del conduttore adoperato, il quale cerchietto venga fatto scorrere in modo che il suo centro descriva un'elica ed il piano del medesimo si mantenga sempre normale alla tangente a detta elica; allora sembra naturale ammettere che ogni punto del cerchietto descriva una *linea di corrente*, cioè una linea in ogni punto della quale la direzione della tangente coincida con la direzione della corrente. Ora noi ci siamo fatti questa ipotesi e l'abbiamo sviluppata in calcoli di cui qui sotto riferisco i risultati. Essi dimostrano che l'ipotesi stessa non è conciliabile con le equazioni della elettrodinamica, le quali porterebbero alla conclusione che la distribuzione della corrente nella sezione del conduttore, e quindi anche la resistenza del medesimo, dovrebbero essere indipendenti dalla frequenza delle correnti alternate adoperate.

Infatti si sa che indicando con u, v, w le tre componenti della densità della corrente secondo tre assi coordinati cartesiani, con t il tempo, con c la conducibilità specifica del conduttore e con

$$\Delta_2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}$$

(1) Phys. Mag., 5, pag. 28, 1903; Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 51, pag. 235, 1902.

il noto parametro differenziale secondo di una funzione qualsiasi f , è richiesto dall'elettrodinamica che si abbia

$$(1) \quad \Delta_2 u = 4\pi c \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$(2) \quad \Delta_2 v = 4\pi c \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$(3) \quad \Delta_2 w = 4\pi c \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Essendo nota la direzione del vettore *densità di corrente*, si indichino con α, β, γ i coseni di direzione del medesimo e si ponga per brevità $\Phi = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, cioè si indichi con Φ la grandezza del vettore medesimo. Allora

$$(5) \quad \begin{cases} u = \alpha \Phi \\ v = \beta \Phi \\ w = \gamma \Phi. \end{cases}$$

Si prenda adesso l'equazione (1) e si osservi che

$$\Delta_2(\alpha \Phi) = \alpha \Delta_2 \Phi + 2 \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} + \Phi \Delta_2 \alpha;$$

la quantità racchiusa entro parentesi nel secondo membro non è altro che il parametro differenziale misto delle due funzioni α e Φ . Rappresentandolo col noto simbolo \mathcal{F} si ha:

$$\Delta_2(\alpha \Phi) = \alpha \Delta_2 \Phi + 2\mathcal{F}(\alpha, \Phi) + \Phi \Delta_2 \alpha.$$

Operando in modo analogo sui primi membri delle (2) e (3), si vede che il gruppo di equazioni (1), (2), (3), (4) si trasforma nel sistema di equazioni

$$(6) \quad \alpha \Delta_2 \Phi + 2\mathcal{F}(\alpha, \Phi) + \Phi \Delta_2 \alpha = 4\pi c \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$(7) \quad \beta \Delta_2 \Phi + 2\mathcal{F}(\beta, \Phi) + \Phi \Delta_2 \beta = 4\pi c \beta \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$(8) \quad \gamma \Delta_2 \Phi + 2\mathcal{F}(\gamma, \Phi) + \Phi \Delta_2 \gamma = 4\pi c \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$(9) \quad \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right\} = 0.$$

Moltiplicando la (6) per γ e la (8) per $-\alpha$ e sommando si ottiene una equazione in cui riescono eliminate simultaneamente le espressioni $A_2\Phi$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

Analogamente si può operare sulla (7) e (8); si ottengono così le due equazioni

$$(10) \quad \gamma\mathcal{F}(\alpha, \Phi) - \alpha\mathcal{F}(\gamma, \Phi) + \frac{\Phi}{2}(\gamma A_2\alpha - \alpha A_2\gamma) = 0$$

$$(11) \quad \gamma\mathcal{F}(\beta, \Phi) - \beta\mathcal{F}(\gamma, \Phi) + \frac{\Phi}{2}(\gamma A_2\beta - \beta A_2\gamma) = 0,$$

Se a queste equazioni viene associata la (9) e si dividono tutti i termini per Φ , si ottiene

$$(12) \quad \alpha \frac{\partial \log \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \log \Phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \log \Phi}{\partial z} = - \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right\}$$

$$(13) \quad \gamma\mathcal{F}(\alpha, \log \Phi) - \alpha\mathcal{F}(\gamma, \log \Phi) = \frac{1}{2} \{ \alpha A_2\gamma - \gamma A_2\alpha \}$$

$$(14) \quad \gamma\mathcal{F}(\beta, \log \Phi) - \beta\mathcal{F}(\gamma, \log \Phi) = \frac{1}{2} \{ \beta A_2\gamma - \gamma A_2\beta \}.$$

Queste equazioni sono generali e valgono qualunque siano i valori dei coseni di direzione α, β, γ e qualunque sia la forma del conduttore in esame. Esse inoltre valgono sia per correnti continue che per correnti variabili, purchè sia soddisfatta l'ipotesi che la direzione delle linee di corrente sia invariabile col tempo. Esse in vari casi si riducono ad identità, ed allora non giovano per la risoluzione del problema a cui si riferiscono.

Così per es. nel caso di conduttori cilindrici, se la corrente ha la direzione dell'asse delle z , si ha:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1,$$

ed allora le equazioni (13) e (14) diventano identicamente soddisfatte, e la (12) dà

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial z} = 0;$$

questa eguaglianza esprime che lungo una linea di corrente, la grandezza della densità di corrente è costante, cosa che era ben naturale prevedere.

Nel caso di un solenoide, si supponga come già è stato sopra indicato, che esso sia generato da un cerchietto in moto. Tale cerchio sia quello rappresentato dalla figura 4, in dimensioni molto ingrandite; in essa siano x_1 ed x_2 le coordinate polari di un punto M qualsiasi e sia x_3 la lunghezza dell'arco descritto dal centro O del cerchio a partire da un punto fisso A.

Il solenoide generato col movimento del cerchio sia quello rappresentato dalla figura 5; lo si riferisca ad una terna di assi ortogonali di cui l'asse

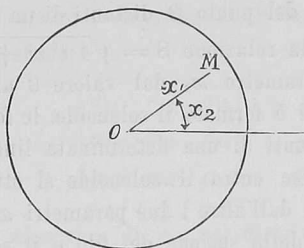


FIG. 4.

delle z coincida con l'asse del solenoide e l'asse delle x passi per il punto A a partire dal quale si contano le lunghezze degli archi x_3 .

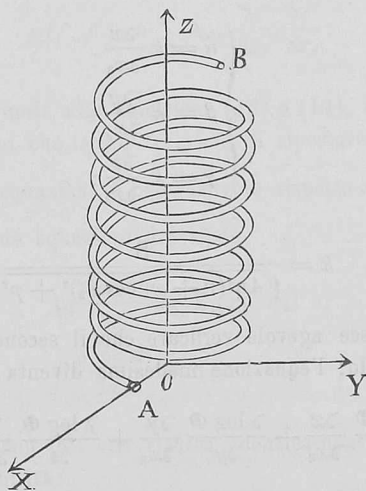


FIG. 5.

Allora la linea di corrente descritta dal punto M è rappresentata dalle equazioni:

$$(15) \quad \begin{cases} x = (r + x_1 \cos x_2) \cos \frac{2\pi}{S} x_3 \\ y = (r + x_1 \cos x_2) \sin \frac{2\pi}{S} x_3 \\ z = \frac{p}{S} x_3 + \frac{2\pi r}{S} x_1 \sin x_2, \end{cases}$$

dove le costanti r, p, S caratterizzano l'elica descritta dal centro O del cerchio e rappresentano rispettivamente la distanza fra i punti della medesima e l'asse Oz , il passo dell'elica e l'arco della medesima compreso fra due posizioni successive del punto O distanti di un passo intero; queste tre costanti sono legate dalla relazione $S = \sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}$.

Col variare del parametro x_3 dal valore 0 al valore l , dove l è la lunghezza del filo di cui è formato il solenoide, le formule precedenti danno le coordinate dei vari punti di una determinata linea di corrente; tutte le linee di corrente comprese entro il solenoide si ottengono facendo variare indipendentemente l'uno dall'altro i due parametri x_1 ed x_2 il primo fra 0 e a dove a è il raggio della sezione del filo e il secondo fra 0 e 2π .

Messe le cose in questo modo, è naturale ammettere che per qualunque valore di x_1, x_2, x_3 compreso entro i limiti sopra definiti — eccetto tutto al più per $x_1 = a$ — esistano sempre la funzione Φ e le sue derivate rispetto ad x_1, x_2, x_3 .

Quanto ai coseni di direzione della linea di corrente descritta da M , essi sono:

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha = k \frac{\partial x}{\partial x_3} \\ \beta = k \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ \gamma = k \frac{\partial z}{\partial x_3}; \end{cases}$$

dove

$$(17) \quad k = \frac{S}{\sqrt{4\pi^2(r + x_1 \cos x_2)^2 + p^2}}.$$

Con tali ipotesi riesce agevole verificare che il secondo membro della (12) è identicamente nullo; l'equazione medesima diventa allora:

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_3} = 0;$$

questa equazione esprime, come era ben naturale prevedere, che lungo ogni linea di corrente la densità della corrente è costante.

Per vedere come si trasformano le equazioni (13) e (14), basta applicare le formule generali che servono al calcolo dei parametri differenziali secondo e misto in coordinate curvilinee qualsiasi. A tal uopo differenziando le (16) si calcoli l'espressione

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e si ponga per brevità

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + 2a_{23}dydz,$$

si chiami a il discriminante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ed A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} nel discriminante a , diviso per a stesso. Allora il parametro differenziale secondo di una funzione qualsiasi f ed il parametro differenziale misto di due funzioni f ed f' , si esprimono con le formule

$$A_2 f = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\sum_r \sqrt{a} A_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r} \right]$$

$$F(f, f') = \sum_{r,s} A_{r,s} \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f'}{\partial x_s}.$$

Applicando queste formule alle equazioni (13) e (14), con lunghe ma assai semplici trasformazioni che io qui tralascio di riportare, si trova che il sistema di quelle due equazioni si può risolvere rispetto a $\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_2}$, e si ottengono così due equazioni del tipo:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log \Phi}{\partial x_1} = X_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial \log \Phi}{\partial x_2} = X_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

Le funzioni X_1, X_2 sono tali che risulta identicamente soddisfatta la nota condizione di integrabilità:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1};$$

perciò il sistema delle equazioni (18) è integrabile e fornisce una equazione del tipo:

$$\log \Phi = F(x_1, x_2) + C,$$

dove C è una costante rispetto ad x_1, x_2 ed x_3 , e perciò è in generale una funzione di t . Ne segue che Φ è della forma:

$$\Phi = g(t) \cdot \psi(x_1, x_2),$$

il che appunto dimostra che la distribuzione della corrente dovrebbe risultare indipendente dalla specie di corrente adoperata.

Da queste sommarie considerazioni risulta che lo studio teorico della resistenza dei solenoidi per correnti variabili è molto più complesso di quanto appare dai riferiti lavori del Wien e del Sommerfeld, i cui risultati teorici non sembrano ancora suscettibili di una pratica applicazione.

Paleontologia. — *Fossili turoniani della Tripolitania*. Nota del Corrispondente C. F. PARONA.

Il prof. P. Vinassa de Regny, riferendo sui risultati di un viaggio in Tripolitania (¹), fra le altre interessanti notizie, accennò al rinvenimento di alcuni fossili cretacei in un calcare compatto giallastro di Tarahuna presso Homs (Tripolitania settentrionale), che provvisoriamente attribuì al Cretaceo superiore. Questi fossili egli volle offrirmeli in esame, con atto di cortesia pel quale io gli sono obbligatissimo, ed in questa comunicazione intendo appunto di riassumere le conclusioni dello studio fattone. Le specie riconosciute sono:

Caprinula Sharpei, Choffat (?)

Biradiolites Arnaudi, Choffat (?)

Sphaerulites cfr. *patera*, Arnaud

Radiolites lusitanicus Choffat

Salenia n. f.

Orthopsis cfr. *miliaris* Cotteau

Orbitolina (tre forme).

Le riserve sui riferimenti specifici dipendono dallo stato di conservazione degli esemplari e sono facilmente spiegabili, se si pensa alla scarsità, generale nei giacimenti a rudiste, di esemplari, che conservino riconoscibili i caratteri interni ed esterni, richiesti per la determinazione, secondo le moderne vedute, riguardo l'interpretazione dei generi e della specie nelle rudiste. Ma queste incertezze permettono tuttavia di riconoscere all'insieme della piccola fauna la sua spiccata somiglianza colla fauna a rudiste del Turoniano medio e superiore del Portogallo (²), e quindi anche dell'Appennino, dove le faune turoniane presentano notevoli affinità con quelle portoghesi.

(¹) P. Vinassa de Regny, *Note geologiche sulla Tripolitania*, Rend. r. Accad. d. Sc. dell'Ist. di Bologna, 1902.

(²) P. Choffat, *Facies ammonitiq. et facies récifal du Turonien portugais*. Bull. Soc. Géol. de France, 1897, XXV, pag. 470. — Rec. des Monogr. strat. sur le Syst. Crét. du Portugal, Deux. Ét., *Le Crét. sup. au nord du Tage*, Lisbonne, 1900, pag. 167 e seg.