ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nella ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato.* Nota di Giulio Pavanini, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

L'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino con velocità finita, fu dall'elettrodinamica trasportata all'astronomia, nella speranza che essa valesse a render conto di alcune poche ed eccezionali divergenze fra le osservazioni e le previsioni teoriche basate sulla legge di Newton.

Così Zöllner (1) applicò al moto dei corpi celesti la legge di Weber, Lévy (2) quella di Riemann.

Fra le leggi di propagazione, che sono state considerate nella elettrodinamica, è senza alcun dubbio particolarmente notevole quella che si fonda sulla sostituzione dei *potenziali ritardati* ai potenziali ordinari (3).

L'impiego di tali potenziali in astronomia non fu per anco discusso, ed è perciò che io mi permetto di farne un primo tentativo nella presente Nota, trattando del problema dei due corpi.

Arrivo facilmente a stabilire le equazioni che reggono il moto relativo, le quali sono insieme differenziali e funzionali. Per quanto interessante dal

(1) *Principien einer electrodynamischen Theorie der Materie*, Leipzig 1876.
(2) Comptes rendus, t. CX, pag. 545.
(3) Cfr. T. Levi-Civita, *Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica*. Nuovo Cimento, serie V, vol. VI. Pisa, settembre 1903.

punto di vista analitico, la integrazione rigorosa di queste equazioni sembra presentare gravissime difficoltà. Tuttavia per lo scopo astronomico è sufficiente considerare il caso in cui la velocità di propagazione sia grandissima e ci si limiti alla prima approssimazione. Si è allora ricondotti ad equazioni differenziali ordinarie, che si potrebbero rigorosamente integrare a mezzo di funzioni ellittiche. Però in questo modo non apparirebbero direttamente i caratteri intuitivi del movimento. Ho quindi preferito di interpretare i termini addizionali, che si presentano nelle equazioni del moto, come componenti di una forza perturbatrice e di determinare gli effetti di tale forza col solito metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Ecco i risultati principali ottenuti:

la forza perturbatrice è definita per mezzo degli elementi del moto relativo; contiene il fattore A^2, essendo $\frac{1}{A}$ la velocità di propagazione dell'attrazione, ed è interamente situata sul piano dell'orbita;

l'asse maggiore e con esso quindi il moto medio non subiscono che variazioni periodiche;

le variazioni secolari dell'eccentricità e non s'annullano per $e = 0$; ciò porterebbe a concludere non essere possibile l'esistenza d'un moto relativo rigorosamente circolare.

Ricorderò ancora come già Lehmann-Filhès (1) ed Hepperger (2) considerarono gli effetti dovuti alla velocità di propagazione della gravitazione. Essi partono, però, dalla espressione dell'intensità della forza newtoniana modificata per questa causa, anzichè da quella del potenziale. In tal guisa le disuguaglianze riescono espresse per mezzo degli elementi del moto assoluto, donde l'impossibilità di trarne risultati positivi, applicandole ad esempi del sistema planetario, causa l'ignoranza in cui ci troviamo circa il moto del sole. Notisi ancora, che le disuguaglianze stesse risultano proporzionali all'inversa A della supposta velocità di propagazione, il che conduce Hepperger alla strana conclusione che tale velocità debba essere più di 500 volte quella della luce. Ciò si evita con la mia ipotesi, in quanto essa dà origine a disuguaglianze tutte affette dal fattore A^2.

1. *Potenziale newtoniano ritardato.* — Consideriamo una massa M la quale sia animata d'un movimento noto. Sia P_1 la posizione ch'essa occupa in un generico istante t e P rappresenti un punto sul quale agisce la forza newtoniana dovuta alla massa M. Conformemente alla legge di Newton il potenziale unitario delle azioni esercitate da P_1 su P sarebbe $\frac{1}{r}$.

(1) *Astronomische Nachrichten*, n. 2630; 1884.
(2) *Sitzungsberichte der Mathematiche Classe*, Vienna 1888.

Introducendo l'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino in linea retta con velocità finità, si deduce ([1]) invece come espressione del potenziale

$$F = \frac{1}{r} - A \frac{d\frac{1}{r}}{dA},$$

dove A rappresenta il valore inverso della suddetta velocità, ed r la distanza del punto potenziato P, non precisamente da P_1, ma da quella posizione anteriore

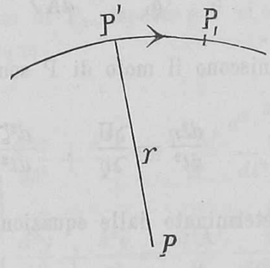

Fig. 1.

P' (sulla traiettoria della massa potenziante) donde azioni propagantesi con velocità $\frac{1}{A}$ arrivano in P proprio nell'istante considerato.

Così F sarà l'espressione del *potenziale newtoniano ritardato*, e la costante $\frac{1}{A}$ rappresenterà la velocità colla quale si propaga la gravitazione.

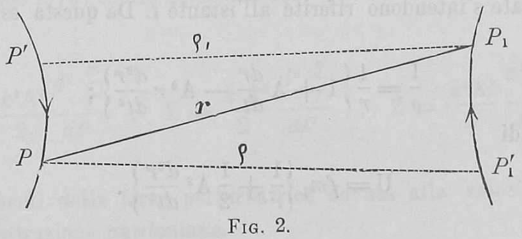

Fig. 2.

2. *Equazione del moto.* — Supponiamo che due corpi di masse rispettive m ed m_1 occupino in un generico istante t le posizioni, riferite ad un sistema di assi fissi, $P(\xi, \eta, \zeta)$, $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$; r rappresenti la distanza $\overline{PP_1}$.

Indichiamo con ϱ la distanza $\overline{PP_1'}$ essendo P_1' la posizione occupata dal corpo di massa m_1 nell'istante $t - A\varrho$. Attribuiamo a ϱ_1 analogo significato. Perciò

$$\varrho = \overline{PP_1'} = r(t - A\varrho) \quad \text{e} \quad \varrho_1 = \overline{P_1 P'} = r(t - A\varrho_1).$$

([1]) Cfr. T. Levi-Civita. loc. cit. pag. 20.

In seguito a quanto dicemmo nel numero precedente, rappresentando rispettivamente con U ed U_1 i potenziali della forza che sollecita P e di quella che sollecita P_1, avremo:

$$U = fm_1\left(\frac{1}{\varrho} - A\,\frac{d\,\frac{1}{\varrho}}{dA}\right),$$

$$U_1 = fm\left(\frac{1}{\varrho_1} - A\,\frac{d\,\frac{1}{\varrho_1}}{dA}\right),$$

Le equazioni che definiscono il moto di P sono adunque:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\;,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta}\;,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}\;; \tag{1}$$

mentre il moto di P_1 è determinato dalle equazioni analoghe:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1}\;,\quad \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \eta_1}\;,\quad \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta_1}\;. \tag{2}$$

Sviluppando ϱ in serie di Taylor ed arrestandosi alle seconde potenze abbiamo

$$\varrho = r\left\{1 - A\,\frac{dr}{dt} + A^2\left(\overline{\frac{dr}{dt}}^2 + \frac{r}{2}\,\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right\},$$

dove le derivate s'intendono riferite all'istante t. Da questa espressione di ϱ risulta

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}\left\{1 + A\,\frac{dr}{dt} - A^2\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\};$$

ne segue quindi

$$U = fm_1\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\,A^2\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\}.$$

Analogamente

$$U_1 = fm\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\,A^2\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\}.$$

Poniamo

$$\xi - \xi_1 = x\;,\quad \eta - \eta_1 = y\;,\quad \zeta - \zeta_1 = z,$$

cosicchè x, y, z sono le coordinate di P_1 riferite ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi ed avente l'origine in P: ne segue

$$r^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dalle espressioni di U, U_1 ed r si deduce allora

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = f m_1 \left\{ -\frac{x}{r^3} + \frac{A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2} \right\},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = f m \left\{ \frac{x}{r^3} - \frac{A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2} \right\}.$$

Le equazioni del moto di P_1 rispetto a P si ottengono sottraendo le (2) dalle (1): esse sono adunque

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{y}{r}}{dt^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{z}{r}}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$k^2 = f(m_1 + m).$$

Confrontando le (3) con le equazioni ben note del moto ellittico risulta che

$$(4) \qquad X = \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2}, \quad Y = \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{y}{r}}{dt^2}, \quad Z = \frac{k^2 A^2}{2} \frac{d^2 \frac{z}{r}}{dt^2}$$

sono le componenti della forza perturbatrice dovuta alla velocità di propagazione della attrazione newtoniana.

È notevole come queste componenti non contengano le prime potenze di A, e dipendano solo dagli elementi del moto relativo.

3. *Componenti* S, T, W *della forza perturbatrice.* — Allo scopo di determinare gli effetti della forza perturbatrice dovuta alla velocità di propagazione della attrazione newtoniana, ci serviremo dalle equazioni che danno la variazione delle costanti arbitrarie. Per l'uso di tali equazioni necessita conoscere le componenti della forza perturbatrice stessa secondo la direzione del raggio vettore (S), della normale a questo raggio contenuta nel piano dell'orbita osculatrice (T), e della normale a questo piano (W).

Indicheremo i coseni degli angoli che queste direzioni formano con gli assi x, y, z a norma dello specchietto

$$\begin{array}{c|c|c|c} & x & y & z \\ \hline \mathrm{S} & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \mathrm{T} & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline \mathrm{W} & \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{array}.$$

Avendo indicato con X, Y, Z le componenti della forza perturbatrice secondo gli assi x, y, z, risulta:

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \mathrm{X}\alpha + \mathrm{Y}\beta + \mathrm{Z}\gamma, \\ \mathrm{T} &= \mathrm{X}\alpha' + \mathrm{Y}\beta' + \mathrm{Z}\gamma', \\ \mathrm{W} &= \mathrm{X}\alpha'' + \mathrm{Y}\beta'' + \mathrm{Z}\gamma''. \end{aligned}$$

Per esprimere in forma definitiva S, T, W ricordiamo che, rappresentando con p, v, w rispettivamente il *parametro dell'orbita*, la *longitudine vera*, e l'*anomalia vera*, abbiamo:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos w}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2};$$

$$\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{\partial\alpha'}{\partial v}, \quad \beta = \frac{y}{r} = -\frac{\partial\beta'}{\partial v}, \quad \gamma = \frac{z}{r} = -\frac{\partial\gamma'}{\partial v};$$

$$\alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial v}, \quad \beta' = \frac{\partial\beta}{\partial v}, \quad \gamma' = \frac{\partial\gamma}{\partial v}.$$

Dalle (4) si deduce inoltre

$$\mathrm{X} = \frac{k^2\mathrm{A}^2}{2}\left\{\frac{x''}{r} + 2x'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + x\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

$$\mathrm{Y} = \frac{k^2\mathrm{A}^2}{2}\left\{\frac{y''}{r} + 2y'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + y\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{k^2\mathrm{A}^2}{2}\left\{\frac{z''}{r} + 2z'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + z\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

e per le formule ricordate sopra

$$x' = \frac{dr}{dt}\alpha + r\frac{dv}{dt}\alpha'$$

$$x'' = \frac{d^2r}{dt^2}\alpha + 2\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}\alpha' + \frac{d^2v}{dt^2}\alpha' - r\frac{\overline{dv}^2}{dt}\alpha.$$

Relazioni analoghe si trovano per y', y'', z', z''.

Abbiamo dunque

$$S=\frac{k^2A^2}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt}-\overline{\frac{dv}{dt}}^2+2\frac{dr}{dt}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+r\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right)=-\frac{k^2A^2}{2}\overline{\frac{dv}{dt}}^2,$$

$$T=\frac{k^2A^2}{2}\frac{d^2v}{dt^2};$$

ed infine

$$\begin{cases} S=-\dfrac{k^4A^2}{2p^3}(1+e\cos w)^4\,, \\ T=-\dfrac{k^4A^2}{p^3}\,e\,\mathrm{sen}\,w\,(1+e\cos w)^3\,, \\ W=0\,. \end{cases}$$

Dall'essere $W=0$ si deduce che la forza perturbatrice è interamente situata sul piano dell' orbita.

S e T risultano poi funzioni della sola anomalia vera.

4. *Disuguaglianze secolari.* — Per la determinazione di queste disuguaglianze partiremo dalle note equazioni, le quali danno la variazione delle costanti arbitrarie, equazioni che per maggior chiarezza trascriveremo (¹):

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^3}{k\sqrt{p}}\left\{e\,\mathrm{sen}\,w\,S+\frac{p}{r}T\right\}$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{k}\left\{\mathrm{sen}\,w\,S+(\cos u+\cos w)\,T\right\}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{r}{k\sqrt{p}}\cos\eta\,W$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{r}{k\sqrt{p}}\,\mathrm{sen}\,\eta\,W$$

$$e\frac{d\varpi}{dt}=2e\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\sqrt{p}}{k}\left\{-\cos w\,S+\left(1+\frac{r}{p}\right)\mathrm{sen}\,w\,T\right\}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2r}{k\sqrt{p}}S+\frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{d\varpi}{dt}+2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}\,.$$

In queste formule è noto che $a,\varphi,\theta,\varpi,\varepsilon,\eta,u$, rappresentano rispettivamente, il *semi grand'asse*, l' *inclinazione*, la *longitudine del nodo*, la *longitudine media all'epoca* 0, *l'argomento della latitudine*, e l'*anomalia eccentrica*: sappiamo ancora che

$$\cos u=\frac{\cos w+e}{1+e\cos w}\,.$$

(¹) Cfr. ad es. Tisserand, *Mécanique Céleste*, t. I, pag. 433.

Sostituendo in queste equazioni i valori di S, T, W dedotti nel numero precedente, e ricordando che $dt = \frac{r^2}{k\sqrt{p}}\,dw$, si ha:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 ,$$

$$\frac{da}{dw} = -\frac{3\,\mathrm{A}^2 k^2}{p^2}\, e \operatorname{sen} w\,(1 + e \cos)^2 ,$$

$$\frac{de}{dw} = -\frac{\mathrm{A}^2 k^2}{2p} \operatorname{sen} w\,(1 + 2e^2 + 6e \cos w + 3e^2 \cos^2 w) ,$$

$$\frac{d\varpi}{dw} = -\frac{\mathrm{A}^2 k^2}{2ep} \left\} -4e + (1 - 2e^2) \cos w + 6e \cos^2 w + 3e^2 \cos^3 w \right\{ ,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dw} = \frac{\mathrm{A}^2 k^2}{\sqrt{ap}} (1 + e \cos w) + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \frac{d\varpi}{dw} .$$

Integrando queste equazioni e tenendo conto dei soli termini secolari abbiamo i valori delle cercate disuguaglianze: cioè

$$\left\{ \begin{aligned} \delta a &= 0 , \\ \delta e &= -\frac{\mathrm{A}^2 k^2}{2p} \left(1 + \frac{7}{2} e^2\right) w , \\ \delta\varpi &= -\frac{\mathrm{A}^2 k^2}{2p}\, w , \\ \delta\varepsilon &= -\frac{\mathrm{A}^2 k^2}{2p} (1 - 3\sqrt{1 - e^2})\, w . \end{aligned} \right.$$

Vediamo così anzitutto che (almeno quando non si tenga conto dei termini di ordine superiore al secondo) la forza perturbatrice da noi considerata non influisce affatto sulla posizione del nodo e sulla inclinazione.

Essa determina sole variazioni periodiche sull'asse dell'orbita, e con esso perciò anche sul moto medio, mentre Hepperger trova che l'effetto maggiore della forza in questione si manifesta appunto sulla variazione secolare dell'asse.

Le perturbazioni di e, ϖ, ε, dipendono solo dalle masse, dall'asse, e dall' eccentricità.

Se si trascura il quadrato dell'eccentricità, le variazioni sono le medesime per i tre elementi e, ϖ, ε.

Notiamo in ultimo come non è ammissibile con le nostre ipotesi un movimento circolare poichè δe si mantiene diverso da 0 per $e = 0$.