ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Fisica matematica. — *Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier*. Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Socio V. Cerruti.

Nel testo di Weber [1], ottimo libro, che io direi necessario ad ognuno che studî fisica matematica, il problema dell'*equilibrio* elastico del suolo isotropo è ricondotto all'integrale di Fourier. Noi non vogliamo qui riassumere tale metodo, ma far vedere come possa utilmente applicarsi anche al problema, certamente meno semplice, ma più utile in pratica [2] delle *vibrazioni* del suolo isotropo.

Prescindendo dalle forze di massa, noi possiamo, per i piccoli moti elastici dei solidi omogenei ed isotropi, scrivere, come è noto, le seguenti equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}-\mathfrak{D}_\omega\, u=0 \\ (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}-\mathfrak{D}_\omega\, v=0 \\ (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}-\mathfrak{D}_\omega\, w=0, \end{cases}$$

dove u, v, w rappresentano le componenti dello spostamento del punto di coordinate x, y, z, secondo i tre assi coordinati; poi

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

misura la dilatazione cubica unitaria della particella che intornia tale punto. Il simbolo $\mathfrak{D}$ è definito dalla relazione generale

$$\mathfrak{D}_k=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

dove t denota il tempo e k una grandezza indipendente da x, y, z, t; e poi dobbiamo ancora aggiungere che Ω e ω rappresentano rispettivamente le velocità delle onde longitudinali e trasversali che possono propagarsi nel solido: non variano da un punto all'altro, e sono grandezze note nel problema.

Pure evitando le difficili e lunghe questioni d'esistenza, noi avremo da trattare tuttavia un problema poco agevole. E supporremo che il semispazio,

[1] *Die partiellen differential-Gleichungen der math. Physik, nach Riemann's Vorlesungen.*

[2] Per esempio, in sismologia.

luogo dei punti che hanno la z positiva, limitato dunque dal piano d'equazione $z=0$, sia tutto occupato da materiale omogeneo, elastico, sul quale non agiscano forze di massa. Noi ammettiamo che, in ogni punto del piano limite, siano verificate le condizioni

$$(2)\qquad \begin{cases} u(x\,,y\,,0\,,t)=\mathrm{U}(x\,,y\,,t) \\ v(x\,,y\,,0\,,t)=\mathrm{V}(x\,,y\,,t) \\ w(x\,,y\,,0\,,t)=\mathrm{W}(x\,,y\,,t)\,, \end{cases}$$

dove U, V, W rappresentano funzioni note; poi ammettiamo ancora che, in ogni punto del piano limite, si conoscano le tre componenti $\mathrm{L}(x\,,y\,,t)$, $\mathrm{M}(x\,,y\,,t)$, $\mathrm{N}(x\,,y\,,t)$ della tensione che agisce sopra questo punto. Se non figurasse, insieme colle altre, la variabile t, non sarebbe necessaria quest'abbondanza di funzioni note, per il calcolo dello spostamento in un arbitrario punto del campo, ma qui cerchiamo $u(x\,,y\,,z\,,t)$, $v(x\,,y\,,z\,,t)$, $w(x\,,y\,,z\,,t)$, in un arbitrario punto del campo ed in un arbitrario tempo. Scriviamo subito le tre note equazioni, valide in ogni punto del contorno,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{L}(x\,,y\,,t)=-\,\omega^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{M}(x\,,y\,,t)=-\,\omega^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{N}(x\,,y\,,t)=-\,(\Omega-2\omega^2)\,\Theta-2\omega^2\,\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Le equazioni (1), (2) e (3) debbono lasciarci risolvere il nostro problema. Con ϱ abbiamo rappresentato la densità costante del solido.

Intanto non sarà male procurarci un metodo, abbastanza semplice, per integrare l'equazione

$$(4)\qquad \mathfrak{D}_k\,\varphi(x\,,y\,,z\,,t)=0$$

quando per la funzione φ sono date le due condizioni, valide sul piano limite

$$(5)\qquad \varphi_{z=0}=\Phi(x\,,y\,,t)\quad,\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=\Psi(x\,,y\,,t).$$

Noi poniamo

$$(6)\qquad \varphi(x\,,y\,,z\,,t)=\mathrm{P}(x\,,y\,,z\,,t)+z\,\mathrm{Q}(x\,,y\,,z\,,t)\,,$$

dove sia

$$(7)\qquad \mathrm{P}(x\,,y\,,z\,,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\,d\beta\,d\varepsilon\,\mathrm{A}(\alpha\,,\beta\,,\varepsilon)\,e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z+\varepsilon t)}\,,$$

$$(8)\qquad \mathrm{Q}(x\,,y\,,z\,,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\,d\beta_1\,d\varepsilon_1\,\mathrm{B}(\alpha_1\,,\beta_1\,,\varepsilon_1)\,e^{i(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\varepsilon_1 t)}\,,$$

e le funzioni A e B siano da determinarsi, e valgano fra le grandezze $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varepsilon_1$, indipendenti da x, y, t, le relazioni

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, k^2 - \varepsilon^2 = 0$$

$$2 i z \frac{d\gamma}{dz} + z(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)\, k^2 - z \varepsilon_1^2 - 2 i \gamma_1 k^2 = 0 .$$

Queste due relazioni (¹) mostrano che è verificata la (4). Perchè anche le due condizioni limiti (5) siano verificate, noi dobbiamo determinare A e B.

Il teorema di Fourier per le funzioni di tre variabili, circa la deduzione del quale è già largo cenno nello stesso libro di Weber, può così formularsi:

$$f(x, y, t) =$$

(9) $$\frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \tau)\, e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\varepsilon(t-\tau)]}\, d\xi\, d\eta\, d\tau .$$

E, giacchè, per $z = 0$, φ si riduce a P soltanto, così vediamo che, ponendo

(10) $$\mathrm{A}(\alpha, \beta, \varepsilon) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta+\varepsilon\tau)}\, d\xi\, d\eta\, d\tau ,$$

otteniamo che resti verificata la prima condizione (5). Ciò determina $\mathrm{P}(x, y, z, t)$. Ora facciamo la derivata $\dfrac{\partial \mathrm{P}(x, y, z, t)}{\partial z}$, e poniamo, per ogni punto del piano limite

(11) $$\Psi_1(x, y, t) = \Psi - \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\right)_{z=0} .$$

Si vede subito che, se noi determiniamo $\mathrm{B}(\alpha, \beta, \varepsilon)$ colla formula

(12) $$\mathrm{B}(\alpha_1, \beta_1, \varepsilon_1) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\xi, \eta, \tau)\, e^{-(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\varepsilon_1\tau)}\, d\xi\, d\eta\, d\tau$$

e osserviamo (9), (8), (6) e (11), ci persuadiamo che anche la seconda condizione (5) è verificata. Possiamo dunque dire d'avere integrato l'equazione (4), tenendo conto delle due condizioni (5).

Ma ora, se deriviamo le (1) rispetto a x, y, z e sommiamo, ricaviamo subito

(13) $$\mathfrak{D}_\Omega \Theta = 0 .$$

Ma le due prime (2) e la terza (3) lasciano agevolmente calcolare Θ in

(¹) Noi possiamo sempre regolare le radici γ, γ_1 in modo che $|e^{\gamma z}|, |e^{\gamma_1 z}|$ risultino < 1, perchè z è soltanto positivo.

ogni punto del piano limite. Poi dalla terza (2), dalle prime due (3) e dalla terza (1), ricaviamo anche $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ in ogni punto del piano limite; sarà dunque facile integrare, col precedente metodo la (13), e ricavare $\Theta(x,y,z,t)$.

Ormai non è difficile ricavare $u(x,y,z,t)$, $v(xy,z,t)$. $w(x,y,z,t)$, osservando che in superficie possiamo ricavarci quante derivate vogliamo di queste funzioni, rispetto a z, e che queste funzioni verificano evidentemente la $\mathfrak{D}_\omega \mathfrak{D}_\Omega = 0$.

Riassumendo, noi possiamo dire d'aver determinato, in modo che non è semplicissimo, ma è pure abbastanza semplice, la deformazione interna di un semispazio isotropo quando si conoscano gli spostamenti e le tensioni superficiali. In pratica, poco si presentano i corpi isotropi, ma può qualche volta essere bastante un risultato approssimativo. Noi non potremmo, per esempio, rimanere scontenti d'uno studio, il quale, da osservazioni eseguite sulla superficie di ragioni soggette a terremoto, ci lasciasse arguire, anche in modo grossolano, la posizione del centro sismico, e stabilire se l'agitazione fu cagionata da scoppio, o, invece, da frana.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore.* Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

Negli anni precedenti il 1902, ossia dal 1899 al 1901 le misure pireliometriche, che istituii sul Monte Cimone (lat. bor. 44°.12'; long. E da Gr. 10°.42'; 2165 m. sul livello del mare) vennero sempre eseguite con attinometri a sistema Violle [1]. Dal 1902 ho avuto modo di potermi servire del pireliometro Ångström a compensazione elettrica; e precisamente negli anni 1902 e 1903 servì il pireliometro n. 19 munito dell'amperimetro S. H.

[1] Veggansi le note seguenti: *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1899* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XII, 1° sem. 1903, pagg. 258-263). *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1900* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, 2° sem. 1903, pagg. 625-627). *Misure pireliometriche fatte sul Monte Cimone nell'estate del 1901* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XI, 1° sem. 1902, pagg. 479-486 e 539-541).