ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

La seconda osservazione del 17, la prima del 18 e la seconda del 25 debbonsi al dott. E. Bianchi; la seconda del 18 e la terza del 25 spettano all'assistente volontario Giovanni Zappa.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. BATTELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Se, generalmente, poniamo

$$\mathfrak{D}_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

dove k denota una grandezza indipendente da x, y, z, t, non è inopportuno far conoscere un metodo, chiaro ed abbastanza semplice, per l'integrazione dell'equazione differenziale

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{D}_{k_1}\mathfrak{D}_{k_2}\ldots\mathfrak{D}_{k_n} = 0,$$

anche in casi particolari [1].

Noi supponiamo, in principio, che $k_1, k_2, \ldots, k_n$ siano grandezze tutte differenti fra di loro; poi stabiliamo che della funzione regolare $u(x, y, z, t)$, soluzione della (1), siano noti, per $t = 0$, i valori $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial t^{2n-1}}$. Chiameremo rispettivamente $V_0(x, y, z)$, $V_1(x, y, z)$, ..., $V_{2n-1}(x, y, z)$ questi valori noti.

Ora scriviamo

$$\text{(2)} \qquad u(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} \left[A_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_\nu t} + A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_\nu t}\right] e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\varepsilon_\nu = +k_\nu\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \qquad \varepsilon'_\nu = -k_\nu\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

[1] In una precedente mia Nota, inserita nel fascicolo di febbraio, ho mostrato che importanza possa avere la (1) in alcune questioni di fisica matematica. Il metodo ivi dato, per integrarla in un caso particolarissimo, è molto meno semplice di questo che ora adoperiamo. Debbo far notare che una prima idea del procedimento, secondo il quale

La funzione u, così definita, verifica, come è chiaro, la (1). Sono soltanto da determinarsi le A_ν, A'_ν, perchè siano verificate le condizioni che debbono essere valide per $t = 0$.

Queste condizioni forniscono subito $2n$ equazioni come la seguente (dove μ assume i valori $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$):

$$V_\mu(x, y, z) =$$

$$(3) \qquad \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} \left[\varepsilon_\nu^\mu A_\nu(\alpha, \beta, \gamma) + \varepsilon_\nu'^\mu A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\right] e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Ma se ci ricordiamo di un teorema di Fourier, che, per le funzioni di tre variabili s_1, s_2, s_3, può così formularsi:

$$f(s_1, s_2, s_3) =$$

$$(4) \quad \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\, e^{i[\lambda_1(s_1-\sigma_1)+\lambda_2(s_2-\sigma_2)+\lambda_3(s_3-\sigma_3)]} d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3,$$

e paragoniamo (3) con (4), otteniamo $2n$ equazioni come quest'altra:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\varepsilon_\nu^\mu A_\nu(\alpha, \beta, \gamma) + \varepsilon_\nu'^\mu A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\right] =$$

$$(5) \qquad \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} V_\mu(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

E se, dunque, le k sono tutte fra di loro differenti, noi troviamo un sistema di $2n$ equazioni di primo grado, con determinante non nullo, atto a determinare le $2n$ funzioni A_ν, A'_ν. In questo caso, la (1) può, dunque, ritenersi integrata, perchè basta sostituire nella formula (2) queste A_ν, A'_ν, date dal sistema (5).

Un po' meno semplice, anche se lasciamo le k tutte differenti fra di loro, si presenta l'integrazione della (1), quando sia noto, per esempio, u, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial z^{2n-1}}$ per $z = 0$. Questi elementi noti sono funzioni di x, y, t. Ricaviamoci il valore di $u(x, y, z, t)$, per z positivo, e vedremo subito che assolutamente analogo sarebbe il metodo per ricavare $u(x, y, z, t)$, dove fosse z negativo: bisogna, per altro, trattare separatamente i due casi. Ciò che facciamo per z vale, *mutatis mutandis*, anche per x, y.

---

si riconduce l'integrazione delle equazioni d'equilibrio elastico del suolo isotropo all'integrale di Fourier, è già nella Memoria di Lamé e Clapeyron *Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*. Ringrazio qui l'illustre prof. Cerruti d'avermi dato precisa indicazione relativa a tale Memoria, molto degna certamente d'essere letta e studiata.

Poniamo

$$u(x, y, z, t) =$$

(6) $$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} [\mathrm{B}_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma_\nu z} + \mathrm{B}'_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma'_\nu z}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)},$$

ma qui dobbiamo leggere

$$\gamma_\nu = +\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)}\ , \quad \gamma'_\nu = -\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)}\ ,$$

sempre quando $\alpha, \beta, \varepsilon$ siano tali che la grandezza $\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)$ sia positiva, e dobbiamo invece leggere

$$\gamma_\nu = \gamma'_\nu = +i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2}}\ ,$$

ogni volta che ciò non avvenga. Questo provvedimento non toglie, come è chiaro, la continuità di γ_ν, γ_ν'.

Finchè $\alpha, \beta, \varepsilon$ variano in modo che *tutti* i valori γ_ν, γ_ν' differiscano fra di loro, noi potremo determinare $\mathrm{B}_\nu(\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathrm{B}_\nu'(\alpha, \beta, \gamma)$ con un sistema perfettamente analogo a (5). Supponiamo invece che la variazione di α, β, γ fuori da questo campo abbia portato γ_1 a coincidere con γ_1', lasciando invece le altre tutte differenti. Allora, nella (6) le due grandezze B_1 e B_1' hanno lo stesso coefficiente, e ci basterà determinare la funzione $\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_1'$, al che si presta perfettamente un sistema analogo a (5), privato, se vogliamo, dell'ultima equazione. È facile vedere che analoga possibilità si presenta quando altre γ si portano a coincidere colla rispettiva γ'.

Rimangono da studiarsi i precedenti problemi, quando, per l non maggiore di n, sia, per esempio, $k_1 = k_2 = \cdots = k_l$; supponiamo che, per $t = 0$, si conosca u e le sue $2n - 1$ prime derivate rispetto a t: qui stabiliamo

$$u = u_0 + t u_1 + t^2 u_2 + \cdots + t^{l-1} u_{l-1}$$

$$u_h(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, [\mathrm{A}_h(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_h t} + \mathrm{A}'_h(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_h t}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, l-1)$$

$$u_0(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} [\mathrm{A}_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_\nu t} + \mathrm{A}'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_\nu t}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\cdot$$

Procedendo come prima, troviamo un sistema di equazioni di primo grado, analogo a quello rappresentato dall'equazione (5), ma è un po' meno facile dimostrare l'indipendenza delle equazioni che vi figurano. Il determinante, che nell'altro sistema si presentava come un prodotto di differenze, qui presenta inoltre, come il lettore potrà vedere facilmente, $2n - 2l$ fattori multipli d'ordine l, e si vede poi subito che è diverso da zero, quando le $\varepsilon, \varepsilon'$, da $\varepsilon_l, \varepsilon'_l$ in poi, sono tutte fra loro differenti. Nel caso di $n = l$, si dimostra che il determinante non è nullo, perchè, se fosse nullo, sarebbe anche nullo, nel determinante che corrisponde al caso di n diverso da l, il primo minore principale d'ordine $2l$, il che darebbe coefficiente nullo al prodotto dei termini principali del suo aggiunto. Per un lettore che sia pratico dell'algebra basterà questo semplice accenno.

Se, per $z = 0$, fossero noti i valori $u, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial z^{2n-1}}$, volendo calcolare $u(x, y, z, t)$, porremmo

$$u = u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + \cdots + z^{l-1} u_{l-1}$$

$$u_h(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha \, d\beta \, d\varepsilon \left[\mathrm{B}_h(\alpha, \beta, \varepsilon) \, e^{i\gamma_h z} + \mathrm{B}'_h(\alpha, \beta, \varepsilon) \, e^{i\gamma'_h z} \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, l-1)$$

$$u_0(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha \, d\beta \, d\varepsilon \sum_{\nu=l}^{n} \left[\mathrm{B}_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon) \, e^{i\gamma_\nu z} + \mathrm{B}'_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon) \, e^{i\gamma'_\nu z} \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)},$$

assumendo i valori delle γ, γ' in diverso modo, secondo che si voglia $u(x, y, z, t)$ per z positivo o per z negativo; come precedentemente. Ciò che è detto per z vale anche, con opportuni adattamenti, per x e per y.

Giova notare come l'integrazione della (1), in tutti i casi esaminati, sia ricondotta all'integrale di Fourier.