ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* [1]. Nota del dott. R. MAGINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

1. Nella Nota precedente [2], allo scopo di seguire l'ordine di esposizione adottato nei testi teorici di elettrostatica, ho messo per primo in evidenza il caso di un disco al potenziale $V \neq 0$, posto parallelamente e ad egual distanza da altri due grandi piatti al potenziale zero, ed ho poi scritto le formole (2), (3), (4), (8), tutte esprimenti capacità, come se la carica fosse distribuita soltanto su una sola faccia del disco. Così nel § 8 il calcolo procede come se invece di due grandi piatti, ne esistesse uno solo. Perciò, mentre le formole delle striscie addizionali sono perfettamente a loro posto, e debbono essere ritenute rigorosamente esatte, perchè ricavate dal calcolo proprio nel caso del disco posto in mezzo agli altri due; le formole esprimenti la capacità non rappresentavano effettivamente che la semicapacità *totale*, cioè il semirapporto della carica su ambedue le faccie del disco al suo potenziale. Quelle formole (comprese quelle di Maxwell, che vennero perciò divise per metà) furono così scritte, perchè praticamente non si adopera che un grande piatto al potenziale zero, e perchè allora esse rappresentano senz'altro la capacità *effettiva* del disco, come è facile mostrare.

Se consideriamo infatti un piatto di grandezza finita caricato ad un potenziale V, posto sopra e parallelamente ad un piatto assai grande legato alla terra, le quantità di elettricità sparse sulle due faccie sono del tutto differenti in grandezza, mentre esse sono eguali se il piatto considerato è posto in mezzo ad altri due. Quelle quantità sono così differenti, che si può ritenere l'ettricità come sparsa soltanto sopra una sola faccia, e precisamente su quella che è rivolta al grande piatto. In questa la carica è la stessa che se la densità fosse uniforme e se la superficie appartenesse ad un piano infinito, aumentata però della carica della striscia addizionale; la quantità sull' altra è invece infinitesima di fronte a questa. Le due cariche sono infatti approssimativamente (cfr. J. J. Thomson, *Notes on Recent* ecc., § 235):

$$\frac{V}{4\pi d}\left(l+\frac{d}{\pi}\right), \tag{1}$$

$$\frac{V}{4\pi^2}\log\left\{1+\frac{\pi l}{d}+\log\left(1+\frac{\pi l}{d}\right)\right\}, \tag{2}$$

dove l esprime la lunghezza di una striscia avente per larghezza l'unità, presa nel piatto di grandezza finita e supposta limitata da un orlo rettilineo; V, il

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.
[2] V. questi Rendiconti a pag. 6.

potenziale; d, la distanza dei piatti. Se, per semplicità, ed al solo fine di formarsi un'idea della grandezza approssimativa della carica sulla faccia esterna del nostro disco di cm. 15 di raggio, noi supponiamo $l = \pi R^2$ e $d =$ cm. 0,1, si vede subito che, mentre la (1) conduce a trovare una capacità di cm. 562,525, la (2) non aggiunge a questa che cm. 0,25, cioè nemmeno la duemillesima parte.

Ora, tanto nel caso di un grande piatto quanto in quello di due, la quantità di elettricità sparsa rispettivamente sulla faccia *interna* o su ciascuna delle due faccie, è la stessa (Maxwell, *Elec. and Magn.*, § 202; J. J. Thomson, l. c., §§ 235, 236) che se la distribuzione fosse uniforme anche in prossimità dell'orlo e la stessa che per due piatti infiniti, con la larghezza del piatto in esame aumentata della solita striscia addizionale; quindi si può asserire che, a meno della capacità infinitesima che dovrebbe essere aggiunta dipendentemente dalla debolissima carica esistente sulla faccia *esterna*, le formole delle striscie addizionali considerate nella Nota precedente, sono con la stessa approssimazione applicabili ad un piatto posto di fronte ad un altro molto più esteso di esso, e al potenziale zero. Ciò che rappresenta appunto la disposizione più usata nella pratica.

La grandezza della striscia addizionale rimane, come è evidente, la stessa nell'un caso e nell'altro; solamente, poichè ora d esprimerà la distanza fra il disco ed il grande piatto, mentre prima indicava quella fra i grandi piatti, dovremo porre $2d$ al posto del primitivo d. La capacità del disco sarà nel nuovo caso eguale alla semicapacità, di cui si è parlato sopra. Rimangono quindi applicabili senz'altro alla nuova disposizione le considerazioni svolte nella precedente Nota.

Sommando la (1) e la (2), dopo averle divise per V, si ha:

$$\frac{V}{4\pi d}\left(l+\frac{d}{\pi}\right)+\frac{1}{4\pi^2}\log\left\{1+\frac{\pi l}{d}+\log\left(1+\frac{\pi l}{d}\right)\right\},$$

che può scriversi:

$$\frac{1}{4\pi d}\left[l+\frac{d}{\pi}\left(1+\log\left\{1+\frac{\pi l}{d}+\log\left(1+\frac{\pi l}{d}\right)\right\}\right)\right],$$

od anche:

$$\frac{l}{4\pi d}\left[1+\frac{d}{\pi l}\left(1+\log\left\{1+\frac{\pi l}{d}+\log\left(1+\frac{\pi l}{d}\right)\right\}\right)\right], \tag{3}$$

che esprime la capacità totale della striscia considerata.

Da questa espressione si potrebbe subito ricavare quella della striscia addizionale, e svolgere per questa le considerazioni del caso. Ma ciò sarebbe inutile, perchè la formola che si ricaverebbe dalla (3), oltre non essere troppo comoda per il calcolo, non presenta che una relativa precisione, provenendo la (1) e la (2), e quindi anche la (3), da sviluppi incompleti di esponenziali.

2. Sarà perciò preferibile studiare le formole date dal Kirchhoff [1]. Ho già detto che questi, dopo avere constatato che la soluzione data dal Clausius

[1] Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Berl., 15, 1877.

per la carica di un condensatore circolare non può rappresentare esattamente lo stato delle cose, perchè valevole soltanto nel caso in cui la grossezza delle armature si possa considerare come estremamente piccola di fronte alla loro distanza, si propose di studiare il caso più generale di un condensatore con o senza anello di guardia, introducendo nel calcolo e tenendo nel debito conto l'influenza della grossezza, quando essa non è trascurabile.

Valendosi del metodo indicato nella precedente Nota, il Kirchhoff studiò il caso in cui l'elettricità è distribuita su superficie di rotazione conduttrici, e suppose poi che tali superficie fossero appunto quelle di due lastre costituenti un condensatore circolare, eguali fra loro, di grossezza b, di raggio R, poste parallelamente l'un l'altra a distanza $2d$. Il calcolo suppone R come finito, d e b come piccoli rispetto a R. Detti $+1$ e -1 i potenziali delle due armature, il Kirchhoff calcola per tutti i punti delle superficie e del campo elettrostatico, la funzione potenziale e la funzione di flusso; e confrontando poi la espressione di quest'ultima con un'altra già trovata in precedenza ed in cui figura una costante, dà senz'altro il valore di questa costante, la quale non è altro che il doppio della quantità di elettricità contenuta nella intiera lastra del condensatore portata al potenziale $+1$. Questa quantità è:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)\,R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\frac{2d+b}{b}\right\}, \tag{4}$$

dove e indica la base dei logaritmi neperiani. Naturalmente, la carica dell'altro disco è della stessa grandezza e di segno contrario.

Passiamo ora allo studio della (4).

3. Per il principio delle immagini elettriche, la distribuzione su un piatto a potenziale $+V$ è la medesima come se invece di un altro piatto a potenziale $-V$ e alla distanza $2d$, avessimo un piatto assai esteso al potenziale zero, posto parallelamente al primo e a distanza d da esso. Quindi la (4), che, per esprimere la capacità del condensatore formato dai due dischi, dovrebbe ancora essere divisa per metà, rappresenta senz'altro la capacità, già corretta, del condensatore formato dal disco circolare posto in presenza di un grande piatto legato alla terra, che è proprio il caso che c'interessa.

Osservando la (4), si scorge subito che, data quest'ultima disposizione, il primo termine non esprime altro che la capacità del disco ricavata dalle sue dimensioni, astraendo dalla perturbazione prodotta dagli orli. Ci occuperemo quindi del secondo termine, che rappresenta invece la correzione della capacità, cioè l'aumento di capacità dovuto alla influenza degli orli, e cercheremo anche di determinare la larghezza della striscia addizionale. Supponendo, al solito, la distribuzione come uniforme, potremo immaginare riunite, con la stessa densità, nella così detta striscia addizionale, le maggiori cariche effettivamente esistenti sulla superficie, in vicinanza dell'orlo, sull'orlo (inteso come spigolo) e sulla superficie cilindrica laterale del disco.

Allora, chiamando λ la larghezza di questa striscia, potremo porre la capacità C del condensatore sotto la forma:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{2\pi R.\lambda}{4\pi d};$$

e poichè per C_a, correzione della capacità, è

$$\text{(5)} \qquad C_a = \frac{R\lambda}{2d} = \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)\,R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\frac{2d+b}{b}\right\},$$

così si ha subito:

$$\text{(6)} \qquad \lambda = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)\,R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\}.$$

Misurando l'influenza dell'orlo dalla larghezza λ della striscia, si può facilmente vedere come essa cambi con la grossezza e con la distanza. Derivando la (6) rispetto a b si ottiene:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b} = \frac{1}{2\pi}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right);$$

dunque quell'influenza cresce con l'aumentare della grossezza, b e d essendo sempre numeri positivi. La stessa cosa avviene per la correzione C_a.

E derivando la (6) rispetto a d, si ha:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial d} = \frac{1}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi R}{e} + \log\frac{2d+b}{d^2} - 1\right\},$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial d^2} = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2(d+b)}{d(2d+b)}\right\} = \frac{-1}{\pi}\left\{\frac{1}{d} + \frac{b}{d(2d+b)}\right\},$$

$$\frac{\partial^3\lambda}{\partial d^3} = \frac{1}{\pi}\,\frac{b(4d+b)}{d^2(2d+b)^2},$$

la quale terza derivata è una quantità essenzialmente positiva e sta perciò ad indicare che l'influenza dell'orlo cresce e diminuisce col crescere e diminuire della distanza dei piatti. Questo resultato ed il precedente riguardante la grossezza sono perfettamente conformi a quelli già ottenuti nella I Nota dall'esame della formola di J. J. Thomson.

E derivando la (5) rispetto a d, si ha;

$$\frac{\partial C_a}{\partial d} = -\frac{R}{2\pi}\left\{\frac{1}{d} + \frac{b}{2d^2}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

quantità negativa; quindi, la correzione della capacità diminuisce quando cresce la distanza dei piatti, per quanto poi, effettivamente, essa rappresenti, pure diminuendo, una parte sempre più rilevante delle capacità totali relative ai successivi valori della distanza, come sarebbe facile mostrare. Ora, poichè

$$\lambda = \frac{2d\,C_a}{R},$$

e λ è crescente con d, mentre C_a è decrescente con esso, risulta subito che la correzione della capacità diminuisce più lentamente di quel che non aumenti la distanza.

4. Osservando la (5) e la (6), si scorge d'un tratto che facendo cambiare nello stesso rapporto tutte le dimensioni nel condensatore, sostituendo cioè contemporaneamente a R, b, d i nuovi valori kR, kb, kd, dove k è un numero, si hanno per la striscia addizionale e per la correzione di capacità del nuovo condensatore i nuovi valori $k\lambda$ e kC_a. Ciò permetterà di risparmiare i calcoli per la ricerca della larghezza della striscia addizionale e della correzione di un condensatore, ogni qual volta si conosceranno i valori di λ e di C_a per un altro condensatore che sia legato al primo da una relazione di similitudine.

Viceversa, questo resultato teorico è facilmente suscettibile di verifica sperimentale; così, se la formola di Kirchhoff, da cui siamo partiti, rappresenta bene lo stato delle cose, dovremo trovare che effettivamente l'influenza degli orli è direttamente proporzionale al rapporto di similitudine dei due condensatori. Non è vero, per altro, il rovescio. Infatti, il resultato precedente discende anche dalla formola di Thomson; per questo lato le formole di Kirchhoff e di Thomson conducono ad eguali conseguenze. Eppure, come vedremo fra poco, esse danno per la capacità, per la larghezza della striscia e per la correzione, resultati numerici completamente diversi.

5. Per giudicare dell'influenza degli orli e per fare la verifica delle formole esaminate, può capitare di avere bisogno di calcolare facilmente λ e C_a per un condensatore che non differisca da un altro preso per confronto e di cui siano noti questi due elementi, che per la grandezza del disco, ossia del raggio. Supposto allora che i due condensatori abbiano a comune b e d, e che R e nR sieno i rispettivi raggi, avremo per i due valori di λ:

$$\lambda_R = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log R + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

$$\lambda_{nR} = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log nR + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

dalle quali, sottraendo, si ricaverà subito:

$$\lambda_{nR} - \lambda_R = \frac{d}{\pi}(\log nR - \log R) = \frac{d}{\pi}\log n. \tag{7}$$

Cioè, l'aumento dell'influenza degli orli con l'aumentare del raggio di un condensatore circolare è, a parità di tutti gli altri elementi, proporzionale al logaritmo neperiano del rapporto del nuovo al vecchio valore del raggio.

Per la correzione della capacità si ha analogamente:

$$C_{a_R} = \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log R + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

$$C_{a_{nR}} = \frac{nR}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log nR + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

e sottraendo, dopo avere diviso per n la seconda espressione:

$$\frac{C_{a_{nR}}}{n} - C_{a_R} = \frac{R}{2\pi}\left\{\log nR - \log R\right\} = \frac{R}{2\pi}\log n,$$

e quindi

$$C_{a_{nR}} = n\,C_{aR} + \frac{nR}{2\pi}\log n\,. \tag{8}$$

E poichè $\lambda_{nR} - \lambda_R$ e $C_{a_{nR}} - C_{a_R}$ sono rispettivamente indipendenti, l'una dallo spessore e dal raggio, l'altra dallo spessore e dalla distanza, vuol dire che gli incrementi della larghezza della striscia addizionale sono indipendenti, a parità di rapporto fra i raggi, dal valore dei raggi stessi e della grossezza; e quelli della correzione della capacità, sempre a parità dello stesso rapporto, sono indipendenti dalla grossezza e dalla distanza dei piatti.

6. Ponendo nella (4) $b = 0$, il che equivale a trascurare la grossezza del disco, si ha l'espressione:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{R}{2\pi}\log\frac{8\pi R}{ed}, \tag{9}$$

che ha la stessa forma di quella data dal Clausius. Essa esprime la capacità del disco quando la grossezza è infinitesima.

Applichiamo la (5) e la (6) al disco circolare per il quale $R = 15$ cm., $b =$ cm. 0,5, e facciamo successivamente $d =$ cm. 0,05 e $d =$ cm. 1. Si hanno allora, rispettivamente, per la larghezza della striscia addizionale e per la correzione della capacità, i seguenti valori:

per $d =$ cm. 0,05: $\lambda =$ cm. 0,16921; $C_a =$ cm. 25,381;
per $d =$ cm. 1: $\lambda =$ cm. 1,76909; $C_a =$ cm. 13,268.

La prima correzione equivale all'aggiunta di una parte su 44,324; la seconda, all'aggiunta di una parte su 4,239. Usando la formola ridotta (9) si avrebbe, rispettivamente, per le stesse distanze:

$\lambda =$ cm. 0,12618; $C_a =$ cm. 18,927;
$\lambda =$ cm. 1,57005; $C_a =$ cm. 11,775.

Com'è naturale, i valori ricavati dalla (8) sono notevolmente inferiori a quelli ottenuti dalle (5) e (6). Le correzioni della (9) equivalgono infatti all'aggiunta di una parte su 54,440 ed a quella di una parte su 4,777. Però, malgrado che in essa non figuri la grossezza, dà dei risultati superiori a quelli ottenuti nella I Nota dalla formola di Thomson, che considera invece la grossezza del disco come un elemento principale. Infatti, per $d =$ cm. 0,05, la formola di Thomson conduce solo alla correzione di una parte su 106, mentre la (9) ne aggiunge una su 54 e la (8) una su 44.

7. Per la verifica delle formole e delle proposizioni e regole ricavate, si dovrà forzatamente nella maggior parte dei casi ricorrere all'uso dell'anello di guardia, e fare il confronto tra la capacità del disco quando è circondato dall'anello e quella dello stesso disco quando invece ne è privo.

Ora, se l'artificio dell'anello di guardia creasse, come si ammette in pratica, una distribuzione elettrica uniforme sulla superficie del disco, allora quel confronto riuscirebbe assai facilitato e la capacità del disco, quando esso fosse munito di anello, dovrebbe essere rigorosamente la stessa, sia che venisse ricavata dall'esperienza, sia che fosse dedotta dal calcolo delle sue dimensioni. Ma, purtroppo, la distribuzione elettrica non è in vicinanza del taglio perfettamente uniforme, e la influenza del bordo, pure essendo di molto ridotta, non può dirsi del tutto annullata. Lo spazio d'aria situato frà il disco e l'anello crea una disuguaglianza nella distribuzione, e se anche si suppone, come si fa sovente, che l'anello sia foggiato in modo da costituire un vero e proprio vaso cilindrico conduttore, si potrà benissimo ritenere che sulla faccia interna del disco non si trovino cariche elettriche dal momento che il disco e l'anello formano un vaso quasi completamente chiuso e tutto allo stesso potenziale; ma non potremo bensì trascurare *a priori* la magggiore carica, sia pur debole, esistente sull'orlo considerato come spigolo e come superficie laterale in presenza di un'altra allo stesso potenziale.

Occorrerà quindi formarsi un'idea della grandezza di questa perturbazione, e vedere come essa varii con la larghezza del taglio e con la distanza del disco dal grande piatto.

Ed è ciò che farò in una Nota successiva, valendomi delle formole di Maxwell, di J. J. Thomson e di Kirchhoff.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una precedente Nota (1) ho esposto tutto ciò che si riferisce alla stazione di osservazione col pireliometro Ångström a compensazione elettrica

(1) *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906, pag. 208-213).