ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

interi e non tutti nulli delle λ, tali da annullare la forma (10), e da far sì quindi che la curva K risulti a valenza zero. E di qua segue che le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ sono dipendenti, come dovevasi dimostrare.

Nella ipotesi opposta la forma quadratica (10) è essenzialmente positiva, ed il suo discriminante, non solo è diverso da zero, ma è positivo; e tali sono tutti i suoi minori principali.

La ipotesi del Severi è dunque sempre verificata. E sussiste, senza alcuna restrizione, il teorema seguente, che il Severi deduce da quella ipotesi e da un teorema di Hurwitz sulle corrispondenze algebriche appartenenti ad una curva ([1]):

Sopra una superficie contenente due fasci di curve unisecantisi F *e* Φ, *si può fissare un numero finito di curve indipendenti* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ *(costituenti una base), tali che ogni curva tracciata sulla superficie possa rappresentarsi sotto la forma* (9), *dove* C *è una curva composta di curve* F *e* Φ. *Il discriminante della base è essenzialmente positivo, e tali sono pure tutti i suoi minori principali dei vari ordini.*

Geologia. — *Sull'esistenza dell'Eocene nella Penisola Salentina.* Nota del Corrispondente G. Di Stefano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sugli integrali delle equazioni dell'elettro dinamica.* Nota di R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica date dal Lorentz si riassumono nelle cinque seguenti:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathrm{H} = a\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho \mathrm{V}\right) \\ &-\mathrm{rot}\,\mathrm{E} = a\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\,\mathrm{E} = 4\pi\varrho \quad , \quad \mathrm{div}\,\mathrm{H} = 0 \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\mathrm{V}\varrho) = 0\,, \end{aligned} \right.$$

([1]) Recentemente il Severi è pervenuto a dimostrare che, sopra ogni superficie, si può fissare un numero finito di sistemi algebrici, tali da fornire, mediante addizione o sottrazione, un *multiplo conveniente* di un qualsiasi altro sistema assegnato sulla superficie (Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 6 février 1905). Il teorema del resto, sebbene, sotto un certo rapporto, sia un caso particolarissimo della nuova proposizione, è tuttavia più preciso di questa (perchè il coefficiente di K nella (9) vale 1), e può essere ottenuto con procedimenti meno elevati. Valeva la pena perciò di liberarlo da ogni restrizione.

dove H ed E rappresentano rispettivamente la forza magnetica ed elettrica; V è il vettore velocità degli elettroni rispetto all'etere supposto in riposo, ϱ la carica elettrica, a è la reciproca della velocità della luce nel vuoto (1). Queste equazioni ammettono il seguente sistema di integrali funzionali:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \mathrm{E} = -a \dfrac{\partial \mathrm{J}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \\ \mathrm{H} = \operatorname{rot} \mathrm{J}\,, \end{cases}$$

essendo φ il potenziale elettrostatico (scalare), J il vettore potenziale corrispondente al vettore j della corrente totale, e

$$4\pi j = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho \mathrm{V}.$$

Ma se si suppone conosciuto il movimento degli elettroni, e quindi conosciuti ϱ e V in ogni punto dello spazio e per ogni valore del tempo; e di più si suppone che lo stato iniziale sia quello di riposo e che tutte le funzioni considerate si annullino all'infinito, il sistema (I) ammette dei veri e propri integrali (2). La ricerca diretta di questi integrali, sempre fondata sulle proprietà note dei potenziali ritardati, si può ottenere assai facilmente ed elegantemente nel modo che ci permettiamo di esporre.

2. Si osservi anzitutto che, per le ipotesi fatte, il sistema (I) non può ammettere che al più una soluzione.

Se infatti fossero possibili due valori distinti per H ed E, per le rispettive differenze h ed e, avremmo:

$$\operatorname{rot} h = a \frac{\partial e}{\partial t} \quad , \quad -\operatorname{rot} e = a \frac{\partial h}{\partial t}$$
$$\operatorname{div} h = 0 \quad , \quad \operatorname{div} e = 0\,.$$

Se della prima calcoliamo la rot, si ha

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = \operatorname{grad}\operatorname{div} h - \Delta_2 h = a \frac{\partial \operatorname{rot} e}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,,$$

cioè

$$\square\, h = 0\,.$$

Di qui, tenute presenti le condizioni iniziali e all'infinito, si deduce $h = 0$ in tutto lo spazio (3). Lo stesso dicasi per e; dunque la soluzione è unica.

(1) Adoperiamo le notazioni e i metodi del calcolo vettoriale; vedi: Föppl u. Abraham, *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität*, I Band (1904); *Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, II Band (1905). Vedere ancora: Gans, *Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik*, 1905, Leipzig.

(2) Poincaré, *Electricité et optique*, 2me édition, Paris, 1901, pp. 455-460.

(3) Oltre le dimostrazioni note del Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, II, pag. 134 (1892), si vegga quella assai semplice e diretta del Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur* ecc., tom. II, pp. 540 e seg. (1903); e valida anche per equazioni di forma più generale che s'incontrano in alcune teorie di ottica.

Per trovare una soluzione osserviamo che la quarta equazione del sistema (I) suggerisce di porre

$$\text{(1)} \qquad H = \operatorname{rot} \psi ;$$

sostituendo questo valore nella seconda dello stesso sistema, si ha

$$\operatorname{rot}\left(E + a\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0 ;$$

dunque potremo porre:

$$\text{(2)} \qquad E = -a\frac{\partial\psi}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi' .$$

Sostituendo quindi (1) e (2) nella prima di (I), otteniamo

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\psi = -a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - a\operatorname{grad}\varphi' + 4\pi a\varrho V ,$$

e questa può scriversi

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\psi + a\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) = \Box\psi + 4\pi a\varrho V .$$

Pongasi

$$\psi = \psi' + \psi''$$

e la ψ', oltre alle solite condizioni iniziali e all'infinito, soddisfi in tutto lo spazio, la

$$\Box\psi' = -4\pi a\varrho V .$$

Si deduce quindi che

$$\text{(4)} \qquad \psi' = a\int\frac{\varrho(P', t - ar)\, V(P', t - ar)}{r}\, d\tau ;$$

cioè ψ' è il valore, in P, del vettore potenziale ritardato (con velocità $1:a$) relativo alla sola corrente di convezione; P' è un punto variabile dello spazio ed r è il modulo di $P - P'$.

Dopo ciò per φ' e ψ'' abbiamo, dalla (3),

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\psi' + \operatorname{div}\psi'' + a\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right) = \Box\psi'' .$$

Calcolando la div ψ', colla (4), si ha, con metodo noto,

$$\operatorname{div}\psi' = a\int(\operatorname{div}\varrho V)\frac{d\tau}{r} ,$$

intendendo calcolata $(\operatorname{div}\varrho V)$ rispetto a un punto variabile e come se $t - ar$ fosse costante.

Quindi, in virtù della quinta del sistema (I) (equazione di continuità), valida per qualunque valore del tempo, si deduce

$$\operatorname{div} \psi' = -a \frac{\partial}{\partial t} \int \varrho(\mathrm{P}', t - ar) \frac{d\tau}{r} .$$

Prendiamo dunque

$$\varphi' = \int \varrho(\mathrm{P}', t - ar) \frac{d\tau}{r} , \tag{6}$$

e sarà φ' il potenziale elettrostatico (scalare) ritardato. Per determinare ψ'' avremo quindi l'equazione

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi'' = \square \psi'', \tag{7}$$

che ha la stessa forma dell'equazione dei moti vibratorî liberi di un corpo elastico isotropo (¹). Ma allora è chiaro, per le poste condizioni, che in tutto lo spazio sarà $\psi'' = 0$. Del resto possiamo procedere così. Pongasi

$$u = \operatorname{div} \psi''$$

e della (7) si prenda la divergenza. Avremo subito

$$\varDelta_2 u = \square u$$

onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ,$$

e quindi sempre e in ogni punto dello spazio, $u = 0$; allora la (7) riducendosi alla $\square \psi'' = 0$, ci dà pure $\psi'' = 0$.

Abbiamo dunque per gl'integrali richiesti la forma:

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{E} &= -a \frac{\partial \psi'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi' \\ \mathrm{H} &= \operatorname{rot} \psi', \end{aligned} \right.$$

essendo φ' e ψ' dati dalle (4) e (6).

Si verifica subito che anche la terza di (I) è soddisfatta.

3. Lo stesso metodo è applicabile anche alle equazioni di Maxwell-Hertz nell'ipotesi che non vi sia magnetismo libero.

Se infatti si parte dal sistema

$$\text{(I')} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{rot} \mathrm{H} = a\left(\varepsilon \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi j\right) , \quad -\operatorname{rot} \mathrm{E} = a\mu \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} , \\ &\operatorname{div} \mathrm{E} = 4\pi\varrho \quad , \quad \operatorname{div} \mathrm{H} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0 , \end{aligned} \right.$$

(¹) Detto infatti σ il vettore spostamento, l'equazione dei moti vibratorî liberi è:

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \sigma = \varDelta_2 \sigma - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \square \sigma .$$

si giunge al sistema di integrali funzionali

$$(\mathrm{II}')\qquad \begin{cases} \mathrm{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi' - a\mu\,\frac{\partial \mathrm{J}'}{\partial t} \\ \mathrm{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{J}'\,; \end{cases}$$

φ' è il potenziale elettrostatico, J′ il vettore potenziale, entrambi ritardati con la velocità $1 : a\sqrt{\varepsilon\mu}$. Sostituendo ai potenziali ritardati, i potenziali ordinari abbiamo in (II′) le equazioni di Helmholtz (¹) e quindi la riducibilità dell'un sistema all'altro dimostrata dal prof. Levi-Civita (²).

4. Se nelle formule precedenti, supposto $a = 1$, immaginiamo sostituito t con iu, l'operazione $\square$ coincide colla Δ_2 relativa alle quattro variabili indipendenti x, y, z, u; e però eseguendo una trasformazione ortogonale, definita da:

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u\,, \ldots\ldots, u' = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 u\,,$$

la $\square$ si trasforma in sè stessa.

Diciamo ξ, η, ζ le componenti del vettore V, e poniamo

$$\varrho'\xi' = \varrho(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - i\delta_1)\,, \ldots\ldots, \varrho' = \varrho(\alpha_4 \xi + \beta_4 \eta + \gamma_4 \zeta - i\delta_4)\,.$$

Per quanto è noto sulle trasformazioni ortogonali, risulterà trasformata in sè stessa l'equazione di continuità, cioè la 5ª del sistema (I). Quindi:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + \frac{\partial \varrho'\xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \varrho'\eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \varrho'\zeta'}{\partial z'} = 0\,.$$

Di qui segue subito che se riguardiamo ϱ' come una nuova carica elettrica e le ξ', η', ζ' come componenti di un nuovo vettore V′; poscia consideriamo rispetto alle nuove variabili il potenziale scalare ritardato φ' ed il vettore potenziale J′ e definiamo un nuovo campo elettro-magnetico mediante formule analoghe alle (1) e (2), cioè:

$$\mathrm{E}' = -\frac{\partial \mathrm{J}'}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi'$$

$$\mathrm{H}' = \mathrm{rot}\,\mathrm{J}'\,,$$

otterremo un sistema di equazioni differenziali identico al sistema (I).

Quindi la trasformazione considerata trasforma in sè stesso il sistema (I). Questa trasformazione, come può subito vedersi, comprende come caso particolare quella di Lorentz (³).

(¹) *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*, Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 72, pp. 57-129. 1870.

(²) *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma Hertziana*, Nuovo Cimento, 6 (4), agosto 1897.

(³) Su questa trasformazione vedi la recente Memoria del Poincaré: *Sur la dynamique de l'électron* (Rend. Circolo matem. Palermo. Tomo XXI, pp. 129-176). La trasformazione ivi considerata non ha il determinante eguale ad 1; ma è noto come ci possiamo ridurre a questo caso. Si veda specialmente il § 4 della Memoria del Poincaré.

Si trovano subito le relazioni tra i potenziali J e φ del primo ed J' e φ' del sistema trasformato. Diciamo J_x, J_y, J_z le componenti di J; ed $J'_{x'}$, ecc., quelle di J'. Poichè

$$\Box J'_{x'} = -4\pi\varrho'\xi' = -4\pi\varrho(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - i\delta_1)$$

e

$$\Box J = -4\pi\varrho V \quad , \quad \Box\varphi = -4\pi\varrho \quad , \quad \Box\varphi' = -4\pi\varrho' ,$$

si deduce

$$\Box J'_{x'} = \Box(\alpha_1 J_x + \beta_1 J_y + \gamma_1 J_z - i\delta_1\varphi), \text{ ecc.}$$

Quindi:

$$J'_{x'} = \alpha_1 J_x + \beta_1 J_y + \gamma_1 J_z - i\delta_1 \varphi$$

e due analoghe; e poscia

$$\varphi' = i\alpha_4 J_x + i\beta_4 J_y + i\gamma_4 J_z + \delta_4 \varphi .$$

Assai agevolmente poi si deduce che le componenti delle nuove forze elettriche e magnetiche sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti delle primitive.

Meccanica. — *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota del prof. G. LAURICELLA, presentata dal Socio U. DINI.

Matematica. — *Sur quelques propriétés nouvelles de fonctions cylindriques.* Nota di NIELS NIELSEN, presentata dal Socio U. DINI.

Matematica. — *Théorie et Construction de Tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre.* Nota di ERNEST LEBON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica. — *Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio.* Nota di G. A. BLANC, presentata dal Corrispondente A. SELLA.

In una precedente Nota [1] ho dimostrato come certi preparati estratti dai sedimenti delle sorgenti termali di Echaillon, i quali presentano un'attività immensamente superiore a quella di un ugual peso di idrato di torio, abbiano la proprietà di generare continuamente un prodotto in tutto analogo al torio X di Rutherford, prodotto al quale è dovuta la totalità del potere emanante e gran parte dell'attività diretta dei preparati stessi.

[1] Questi Rendic. XV, pag. 328, 1° sem. 1906.