ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate*. Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Il sig. Lebesgue ha indicato a più riprese come la nozione dell'integrale generalizzato introdotta da lui, rendendo possibile l'integrazione di funzioni derivate che non lo sarebbero colla definizione del Riemann rende altresì possibile la risoluzione del problema delle funzioni primitive con generalità molto maggiore che precedentemente.

Il Lebesgue ha dato precisamente i due enunciati seguenti:

a) *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale della derivata (limitata o non) di una funzione derivabile esista, è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso la funzione è un integrale indefinito della sua derivata* [1].

b) *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista l'integrale di uno dei numeri derivati d'una funzione (supposto finito) è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso l'integrale indefinito di quel numero derivato è la funzione primitiva* [2].

I due enunciati sono appena differenti in ciò che nel secondo non si suppone la derivabilità della funzione primitiva, ma si aggiunge una condizione nelle parole « supposto finito » che può esser dubbio se chieda o non la *limitazione* del numero derivato considerato. La costante differenza che il Lebesgue fa tra le parole « limitato » e « finito » [3] stabilirebbe fra i due enunciati la massima affinità: ciononondimeno nella dimostrazione della seconda proposizione l'ipotesi della limitazione del numero derivato è essenziale.

Ma quanto massimamente importa qui di rilevare è che entrambe le dimostrazioni, quantunque fondate su principî diversi, sono in più punti manchevoli.

In questa prima Nota io mi propongo di portare a tali proposizioni una analisi più accurata, nell'indirizzo medesimo del Lebesgue: in Note successive, collo stesso titolo, darò, spero, qualche nuovo contributo allo studio delle proprietà delle funzioni derivate.

1. *I numeri derivati — superiori o inferiori, a destra o a sinistra —*

(1) Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Mat. (3), 7, pag. 265, n. 30.

(2) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc., Paris, Gauthier-Villars, 1904, pp. 122-3. Cfr. pure Ann. di Mat., loc. cit., pp. 272-274.

(3) Per cui una funzione può esser finita per ogni valore della variabile, ma non limitata in quando, per convenienti valori della variabile assuma valori grandi a piacere.

di una funzione continua $f(x)$ costituiscono una funzione di 2ª classe del Baire; quindi una funzione misurabile (1).

Sia infatti $h_1 h_2 h_3 \dots$ una successione di numeri positivi decrescenti tale che $\lim_{i=\infty} h_i = 0$.

Si chiami u_1 la funzione che, per ogni valore di x e uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ (2) per $h \geq h_1$, e per il valore fissato di x; u_2 la funzione che, per ogni valore di x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_1 \geq h \geq h_2$; ...; u_i la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_{i-1} \geq h \geq h_i$. Ogni funzione u_i è continua: sia infatti $u_i(x_1) = r[f(x_1), x_1, x_1 + h']$, $u_i(x_2) = r[f(x_2), x_2, x_2 + h'']$ (h' e h'' compresi fra h_{i-1} e h_i) e sia, per es. $u_i(x_1) \geq u_i(x_2)$: sarà $r[f(x_2), x_2 + h'] \leq r[f(x_2), x_2, x_2 + h''] = u_i(x_2)$; quindi $0 \leq u_i(x_1) - u_i(x_2) \leq u_i(x_1) - r[f(x_2), x_2, x_2 + h']$. Ma $r[f(x), x, x+h']$ (per h' costante) è funzione continua di x; quindi esiste un ϱ' tale che, tosto che $|x_1 - x_2| \leq \varrho'$, l'ultimo membro è piccolo a piacere (minore di un ε assegnato); cosicchè, per ogni x tale che

$$u_i(x) \leq u_i(x_1)\,,\ |x_1 - x| \leq \varrho',\ \text{si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon .$$

Del pari si mostrerà che esiste un ϱ'' tale che per ogni x per cui

$$u_i(x) \geq u_i(x_1)\,,\ |x_1 - x| \leq \varrho'',\ \text{si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| > \varepsilon .$$

Basterà allora che $|x_1 - x|$ sia minore del minimo fra ϱ' e ϱ'' perchè sia in ogni caso $|u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon$: onde la continuità di $u_i(x)$.

La funzione $\overline{u}(x)$ costituita dai numeri derivati superiori a destra di $f(x)$ assume, per ogni x, il valor limite per $h_i = 0$ (cioè per $i = \infty$) del limite superiore delle $u_j(x)$ per $j \geq i$. Essa può quindi definirsi come segue (3):

Si chiami $v_i^{(h)}(x)$ la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo valore delle $u_h\, u_{h+1} \dots u_{h+i-1}$; la funzione $v_i^{(h)}(x)$ è crescente (o almeno non decrescente) con i: si ponga $w^{(h)}(x) = \lim_{i=\infty} v_i^{(h)}(x)$; la funzione $w^{(h)}(x)$ è decrescente col tendere di h ad ∞, ed il suo limite è $\overline{u}(x)$; ora si vede

(1) Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 121. Ann. di Mat., pag. 273. Le due dimostrazioni sono entrambe erronee, poichè in sostanza si ammette in entrambe (nella seconda in modo esplicito) che la funzione costituita dai numeri derivati si possa definire come la funzione dei limiti superiori od inferiori di $r[f(x), x, x \pm h]$ ove ad h si fa assumere una successione discreta di valori tendenti a 0, gli stessi per ogni x.

(2) Ove $r[f(x), x, x+h] = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(3) Il procedimento qui indicato non differisce sostanzialmente da quello esposto dal Lebesgue nelle prime linee della pag. 121 delle *Leçons*. Nella forma precisa adottata dal Lebesgue il procedimento però non è esatto.

facilmente che le $v_i^{(h)}$ sono continue, come le u_i, le $w^{(h)}(x)$ sono dunque funzioni di 1ª classe del Baire (¹) e quindi $\overline{u}(x)$ è funzione di 2ª classe.

Analogamente si ragiona per le altre funzioni di numeri derivati.

2. Ciò posto, si può dimostrare che, *se la funzione* $\overline{u}(x)$ *dei numeri derivati superiori a destra* (e lo stesso sarebbe per ogni altra funzione di numeri derivati) *della funzione* $f(x)$ *è limitata* (²) (nel qual caso, a causa della sua misurabilità, è certo integrabile (³)) *in un intervallo* $a \dots b$, *l'integrale di essa esteso a questo intervallo è uguale all'incremento della* $f(x)$ *in esso.*

Sia infatti, per ogni x in $a \dots b$, $L \geq \overline{u}(x) \geq l$; si può sempre supporre che L e l siano entrambi positivi, poichè nella contraria ipotesi, basterà considerare, in luogo della $f(x)$, $f(x) + mx$ la cui derivata superiore a destra è $\overline{u}(x) + m$ ed è quindi costantemente positiva ove si scelga m sufficientemente grande. Si divida l'intervallo $L \dots l$ in intervalli parziali di ampiezza $\leq \varepsilon$ mediante i numeri $l_i (l_1 = l, 0 < l_{n+1} - l_n \leq \varepsilon)$ e si chiami e_n l'aggregato degli x per cui $l_{n+1} > \overline{u}(x) \geq l_n$. Esso potrà rinchiudersi in un aggregato numerabile A_n di segmenti, uno generico dei quali indicheremo con A_{np}, e si potrà fare in modo che la misura totale di A_n differisca dalla misura di e_n per meno di un η_n arbitrariamente assegnato: cosicchè dette $m(e_n)$ e $m(A_n)$ le misure di e_n e di A_n,

$$0 < m(A_n) - m(e_n) < \eta_n .$$

Disporremo in seguito del numero η_n convenientemente.

Ad ogni punto x di $a \dots b$ risultano così affissi due numeri n e p definiti l'uno dall'aggregato e_n, l'altro dal segmento A_{np} cui il punto appartiene. A partire da a si ricopra allora l'intervallo $a \dots b$ mediante una serie di segmenti (⁴) $x \dots x + h$ tali che il primo estremo x di ciascuno di essi coincida col secondo estremo del segmento precedente, ovvero — qualora tal punto x non sia raggiunto mediante un numero finito di segmenti precedenti — sia il limite a destra dei secondi estremi dei segmenti precedenti; tali inoltre che, detti n e p i numeri affissi ad x, il segmento $x \dots x + h$ sia interamente contenuto in A_{np} e si abbia

$$l_n - \varepsilon \leq r[f(x), x, x + h] \leq l_n + \varepsilon .$$

(¹) Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Thèse, Annali di Matematica 1904. Cfr. pure Lebesgue, *Leçons*, pag. 111.

(²) Vale a dire non superi mai, in valore assoluto, un limite assegnato.

(³) Non sempre una funzione derivata è integrabile nel senso del Lebesgue (Cfr. Lebesgue, Annali di Mat. (3) pag. 269-270); però ogni funzione misurabile limitata è integrabile (Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 115). Si noti ancora che la condizione che $\overline{u}(x)$ sia limitata ha nel seguito ufficio essenziale per sè, e non solo come condizione d'integrabilità. Di tale ufficio non pare avvedersi il Lebesgue nella sua dimostrazione analoga alla presente, poichè tal condizione egli sopprime nell'enunciato delle pp. 122-123.

(⁴) Cfr. per questo procedimento, Lebesgue, *Leçons*, pag. 163.

Si chiami B_n l'aggregato di tali segmenti corrispondenti all'indice n, $m(B_n)$ la sua misura. B_n sarà contenuto in A_n; quindi $m(B_n) \leq m(A_n)$. Inoltre, se sempre x, $x+h$ sono gli estremi di un segmento della serie appartenente all'indice n,

$$(l_n - \varepsilon)\, h \leq f(x+h) - f(x) \leq (l_n + \varepsilon)\, h$$

onde

$$\sum l_n h - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum l_n h + \varepsilon(b-a)$$

le sommatorie essendo estese a tutti i segmenti della serie. Queste sommatorie rappresentano quindi una serie che può essere multipla, anche ∞-pla; ma poichè si son supposti tutti gli l_n positivi, tal serie consta di soli termini positivi, ed è quindi ordinabile, in modo che si potranno raccogliere a gruppi i termini corrispondenti allo stesso indice n. La relazione precedente prende allora la forma

$$(1) \quad \sum_n l_n m(B_n) - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_n l_n m(B_n) + \varepsilon(b-a).$$

D'altra parte si ha

$$0 \leq m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n [m(A_n) - m(B_n)] = \sum_n m(A_n) - \sum_n m(B_n)$$

$$\sum_n m(B_n) = b - a = \sum_n m(e_n)$$

onde

$$m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n m(A_n) - \sum_n m(e_n) < \sum_n \eta_n$$

e infine

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) = \sum_n l_n [m(A_n) - m(B_n)] < \sum_n l_n \cdot \sum_n \eta_n .$$

Parimenti, collo stesso calcolo, si ha

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(e_n) < \sum_n l_n \sum_n \eta_n ;$$

onde infine ancora

$$\left| \sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) \right| = \left| \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(B_n) \right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(e_n) \right\} \right| < \sum_n l_n \sum_n \eta_n \leq \frac{1}{2}(L + l)\, \frac{L - l}{\varepsilon} \sum_n \eta_n .$$

La scelta degli η_n resta ancora arbitraria: noi la supporremo fatta in modo che

$$\sum_n \eta_n \leq \varepsilon^2 \frac{2}{L^2 - l^2} .$$

Sarà allora

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(B_n)\right| \leq \varepsilon$$

e quindi, per la (1),

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - [f(b) - f(a)]\right| \leq \left|\sum_n l_n\, m(B_n) - [f(b) - f(a)]\right| + \varepsilon$$
$$\leq \varepsilon(b - a + 1).$$

Si faccia ora tendere ε a 0, e di conseguenza crescere n indefinitamente; si avrà, al limite,

$$\int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

3. Il ragionamento si può ripetere per le altre funzioni di numeri derivati. D'altronde se $\underline{u}(x)$ si chiama la funzione dei numeri derivati inferiori a destra di $f(x)$, $-\underline{u}(x)$ è la funzione dei numeri derivati superiori a destra di $-f(x)$, cosicchè, applicando senz'altro alla $-f(x)$ la precedente proposizione,

$$\int_a^b -\underline{u}(x)\, dx = -f(b) + f(a)$$

ossia

$$\int_a^b \underline{u}(x)\, dx = \int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

onde

$$\int_a^b [\overline{u}(x) - \underline{u}(x)]\, dx = 0.$$

Siccome la funzione $\overline{u}(x) - \underline{u}(x)$ non è mai negativa, segue tosto che essa è ovunque nulla, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla [1].

Applicando ancora il teorema alla funzione $-f(-x)$ che ha per numeri derivati a destra i numeri derivati a sinistra di $f(x)$ si riconosce infine che ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui sono diversi i numeri derivati a destra e a sinistra [2] di $f(x)$, onde si conclude che:

La funzione continua $f(x)$ a numeri derivati limitati nell'intervallo $a \ldots b$ ha derivata in ogni punto dell'intervallo, fatta al più eccezione per un aggregato di misura nulla [3].

4. Si può però affermare di più, e con grande semplicità di mezzi, che *l'aggregato dei punti in cui, esistendo derivata così a destra come a sinistra le due derivate sono però diverse, è numerabile.* Si consideri infatti

[1] Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 123. L'osservazione che $\overline{u}(x) - \underline{u}(x) \geq 0$ è d'altronde superflua per questa conclusione come mostrò il Vitali, *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, XX-1905).

[2] Qui occorre precisamente ricorrere alla proposizione del Vitali, ora citata.

[3] Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pp. 123-125, dove però la dimostrazione è assai più laboriosa.

la funzione $\varphi(x\,;m)=f(x)+mx$; ogni punto in cui esistono ma son diverse le derivate a destra e a sinistra di $f(x)$ gode della stessa proprietà rispetto a $\varphi(x\,;m)$. Orbene i punti in cui queste due derivate di $\varphi(x\,;m)$ sono di segno contrario sono per $\varphi(x\,;m)$ punti di massimo o di minimo proprio: questi punti formano quindi un aggregato numerabile [1]. Si considerino allora le funzioni $\varphi(x\,;m_1)$, $\varphi(x\,;m_2)$, ... per una serie di valori di m tali che $|m_i-m_{i+1}|\leq\varepsilon$; in ogni punto in cui le due derivate (a destra e a sinistra) differiscono per più di ε, una almeno di queste funzioni avrà le sue derivate di segno contrario; questi punti formano adunque un aggregato numerabile. Attribuendo allora a ε una successione di valori $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots$ tale che $\lim\limits_{i=\infty}\varepsilon_i=0$, si ottiene infine la proposizione enunciata.

5. Conseguenza immediata della proposizione del n. 2 è che *l'integrale indefinito d'una funzione limitata misurabile ha in ogni punto, ad eccezione di quelli di un aggregato di misura nulla, derivata limitata ed uguale alla funzione integrando* [2].

Sia infatti $\varphi(x)$ la funzione che si integra, e sia, per ogni x in un intervallo $a\ldots b$ $\mathrm{M}\geq\varphi(x)\geq\mathrm{N}$; si ponga

$$f(x)=\int_a^x\varphi(x)\,dx\quad(a\leq x\leq b).$$

Si ha

$$r[f(x)\,,x\,,x+h]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varphi(x)\,dx$$

onde

$$\mathrm{M}\leq r[f(x)\,,x\,,x+h]\leq\mathrm{N}.$$

I numeri derivati di $f(x)$ sono dunque limitati; sia $u(x)$ una qualunque funzione dei numeri derivati di $f(x)$: pel teorema del n. 2 si ha quindi

$$f(x)=\int_a^x u(x)\,dx\quad(a\leq x\leq b).$$

Segue che

$$\int_a^x[\varphi(x)-u(x)]\,dx=0$$

onde, pel citato teorema del Vitali, le due funzioni $\varphi(x)$ ed $u(x)$ possono differire fra loro solo pei valori di x appartenenti a un aggregato di misura nulla.

[1] Schoenflies, *Bericht über Mengenlehre* (Jahresbericht d. D. Math.-Vereinigung 8-1900, pp. 157-158.

[2] In una Nota seguente dimostreremo che in questa proposizione è superflua la condizione che la funzione integrando sia limitata: si può anzi supporre che questa funzione possa anche assumere valori infiniti, purchè sia integrabile. Il Lebesgue, *Leçons*, pag. 124) afferma già questa proposizione in questa sua forma generalissima; ma la dimostrazione ch'egli ne dà non pare attendibile; quando infatti si ammette che la funzione integrando sia illimitata, il ragionamento della pag. 124 citata ammette implicitamente che una certa serie si possa derivare termine a termine del che manca la prova.