ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Nota di MARINO PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Nell'ultimo paragrafo della sua classica Memoria: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde,* pubblicata nel volume VIII dei Mathematische Annalen, Noether esamina alcuni caratteri di una varietà a tre dimensioni, definita da un'equazione omogenea fra cinque variabili, deducendoli dalla considerazione del sistema delle superficie canoniche, tracciato sulla varietà stessa, supposta d'ordine n, dalle varietà aggiunte d'ordine $n-5$. Essi sono: il numero p, Raumgeschlecht, di queste varietà aggiunte linearmente indipendenti fra loro; il Flächengeschlecht $p^{(1)}$ e il Curvengeschlecht $p^{(2)}$ di una superficie canonica; il genere $p^{(3)}$ della curva d'intersezione di due di tali superficie; e il numero $p^{(4)}$ dei punti comuni a tre delle superficie medesime. Accanto a questi invarianti, che, in virtù del loro significato, si dicono *geometrici,* se ne possono considerare altri, che si denominano *numerici*, perchè definiti da espressioni numeriche formate con i caratteri di un sistema qualunque di superficie dato nella varietà, e con quelli del sistema aggiunto. Siffatti invarianti sostituiscono i precedenti, nei casi in cui questi non hanno più senso; coincidono con essi, quando la varietà data soddisfa a certe condizioni; infine sono nuovi caratteri invariantivi per le varietà, nelle quali queste condizioni non si trovano verificate. Lo studio degli invarianti numerici di una varietà costituisce l'oggetto della presente Nota.

Il procedimento col quale si riesce a trovare questi invarianti è naturalmente simile a quello che si segue per la ricerca degli invarianti analoghi sopra una superficie. Qui si è in particolar modo tenuta presente la Memoria di Enriques: *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, inserita nel volume XXXVII degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Riguardo alla varietà data, si suppone che essa possa trasformarsi in un'altra W di un iperspazio affatto priva di singolarità; e a quest'ultima si intendono sempre riferite le ulteriori considerazioni.

Sui sistemi lineari $|S|$ di superficie S, che si prenderanno in esame nella varietà W, si fanno ipotesi e convenzioni analoghe a quelle, che vengono ammesse nella citata Memoria di Enriques, per i sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie.

1. In questo primo numero si trovano esposte alcune proprietà, di cui si fa uso in seguito, sulla dimostrazione delle quali qui per brevità si sorvola.

I. « Il genere aritmetico P e l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques « di una superficie F, somma di r superficie F_r, sono rispettivamente dati « dalle formole:

$$P = \Sigma P_i + \Sigma g(F_i F_j) + \Sigma(F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2} \tag{1}$$

$$\Omega = \Sigma \Omega_i + 8\left[\Sigma g(F_i F_j) + (F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2}\right] - [2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1)] \tag{2}$$

« dove P_i ed Ω_i sono gli invarianti analoghi di una qualunque F_i di quelle « r superficie; $g(F_i F_j)$ rappresenta il genere della curva d'intersezione (va- « riabile) di due F_i e F_j delle superficie medesime; $(F_i F_i F_j)$, il grado del « sistema lineare di curve tracciato sopra F_j dal sistema lineare di super- « ficie cui appartiene F_i; ed $(F_i F_j F_h)$, il numero dei punti comuni (varia- « bili) di tre F_i, F_j, F_h delle superficie date. Infine le somme Σ debbono « essere estese a tutti gli enti simili a quelli messi in evidenza » [1].

Dalle due formole precedenti segue immediatamente l'altra:

$$8P - \Omega = 8\Sigma P_i - \Sigma \Omega_i + 2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1). \tag{3}$$

II. « Le superficie Iacobiane S_j dei sistemi lineari ∞^3 contenuti in un « sistema lineare $|S|$ (∞^3 almeno) di superficie S, dato nella varietà W, « appartengono ad un medesimo sistema lineare ».

Questo sistema può contenere elementi fissi; ed effettivamente contiene una curva fissa, o un determinato numero di punti fissi, se il sistema $|S|$ è ∞^4, oppure ∞^5. Tali elementi si riguardano come virtualmente non esistenti, e così risulta un sistema lineare completo, che si chiama *sistema Iacobiano*, e si indica col simbolo $|S_j|$.

III. « Ogni superficie S_j del sistema $|S_j|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema dato $|S|$ secondo una curva che appartiene al sistema Iacobiano « determinato sopra questa superficie dal sistema caratteristico della super- « ficie medesima ».

IV. « Dato nella varietà W un sistema lineare ∞^3 di superficie S, « virtualmente privo di elementi base, la Iacobiana del sistema $|S+T|$, « che si ottiene sommando ad $|S|$ una superficie T, si compone della Iaco- « biana del sistema $|S|$ e della superficie T contata quattro volte ».

Si dice *sistema aggiunto* ad un sistema dato $|S|$ e si indica con $|S_a|$, il sistema definito dalla relazione simbolica:

$$|S_a| = |S_j - 3S|. \tag{4}$$

[1] Per un caso particolare delle formole (1) e (2), veggasi il n. 4 *a*) del § 1° della Memoria di Severi: *Su alcune questioni di postulazione*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII.

Si indicherà con n il grado del sistema $|S|$, e con p il genere della curva d'intersezione (variabile) di due superficie del sistema medesimo; n_a e p_a avranno i significati analoghi rispetto al sistema aggiunto $|S_a|$; ossia si porrà:

(5) $\quad (SSS) = n \quad , \quad g(SS) = p \quad , \quad (S_a S_a S_a) = n_a \quad . \quad g(S_a S_a) = p_a .$

In virtù del teorema IV e della data definizione di sistema aggiunto, si dimostra come nel caso delle superficie:

V. « Se $|S|$ ed $|S'|$ sono due sistemi lineari irriducibili, virtualmente privi « di elementi base, si ha:

(6) $$|S + S'|_a = |S + S'_a| = |S_a + S'| .$$

Dalla relazione (4) segue:

$$|(SS_a)| = |(SS_j) - 3(SS)|$$

e di qui, tenendo presente il teorema III e ricordando che una curva canonica di una superficie, presa insieme alle curve eccezionali e a tre curve di una qualunque rete irriducibile, costituisce una curva appartenente al sistema lineare completo determinato dalla Iacobiana della rete, si deduce:

VI. « Ogni superficie S_a del sistema $|S_\alpha|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema $|S|$, fuori delle curve eccezionali di questa superficie, secondo « una curva canonica della superficie medesima ».

Quindi detto Ω l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S, si hanno le relazioni:

(7) $$g(SS_a) = \Omega \quad , \quad (SS_a S_a) = \Omega - 1$$

dalle quali segue:

(8) $$g(SS_a) = (SS_a S_a) + 1 .$$

Infine si osservi che si ha ancora:

(9) $$(SSS_a) = 2(p-1) - n .$$

2. Si applichi la relazione (8) anzichè al sistema $|S|$, al sistema $|S + S_a|$; osservando che il sistema aggiunto a quest'ultimo, per la proprietà V del numero precedente è $|S_a + S_a| = |2S_a|$, si ottiene:

(10) $$g(S + S_a \, , 2S_a) = (S + S_a \, , 2S_a \, , 2S_a) + 1 .$$

Ora si ha:

$$g(S + S_a \, , 2S_a) = 2g(SS_a) + 2g(S_a S_a) + 3(SS_a S_a) + (S_a S_a S_a) - 3$$

ossia per le formole (5) e (7):

$$g(S + S_a \, , 2S_a) = 5\Omega + 2p_a + n_a - 6 .$$

Inoltre:

$$(S + S_a, 2S_a, 2S_a) = 4(SS_a S_a) + 4(S_a S_a S_a) = 4\Omega + 4n_a - 4\,.$$

Sostituendo questi valori nell'eguaglianza (10), si trova:

I. « Fra il grado n_a e il genere p_a ha luogo la relazione:

$$(11) \qquad 3n_a - 2p_a = \Omega - 3\,.$$

In virtù della prima delle formole (7), il genere della curva $(S + S_a, 2S_a)$ è dato dall'invariante di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie $S + S_a$. Quindi calcolando questo invariante per mezzo della formola (2), si ha altresì:

$$g(S + S_a, 2S_a) = \Omega + \Omega_a + 8g(SS_a) - (SSS_a) - (SS_a S_a) - 9$$

ossia per le (7) e la (9):

$$g(S + S_a, 2S_a) = \Omega_a + 8\Omega - 2p + n - 6\,.$$

Con questa nuova espressione del $g(S + S_a, 2S_a)$ e conservando per $(S + S_a, 2S_a, 2S_a)$ il valore precedentemente calcolato, l'eguaglianza (10) somministra ancora:

II. « Fra i caratteri n_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$(12) \qquad 4n_a - \Omega_a = 4\Omega - 2p + n - 3\,.$$

Eliminando Ω fra la (11) e la (12) si ha infine:

III. « Fra i tre caratteri n_a, p_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$(13) \qquad \Omega_a + 8(n_a - p_a) = 2p - n - 9\,.$$

3. In virtù del teorema V del n. 1, il genere aritmetico di una superficie $S + S'_a$ è eguale a quello di una superficie $S_a + S'$. Quindi per la formola (1), si ha intanto:

$$(14) \qquad P + P'_a + g(SS'_a) = P' + P_a + g(S'S_a)$$

Inoltre dalla relazione (6) segue ancora:

$$\begin{gathered}(S_a S) + (S_a S'_a) = (S_a S_a) + (S_a S')\\(S'_a S) + (S'_a S'_a) = (S'_a S_a) + (S'_a S')\end{gathered}$$

donde, sommando, si ricava:

$$(SS_a) + (SS'_a) + (S'_a S'_a) = (S'S'_a) + (S'S_a) + (S_a S_a)$$

epperò:

$$\begin{aligned}&g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) + (SS_a S'_a) + (SS'_a S'_a)\\&= g(S'S'_a) + g(S'S_a) + g(S_a S_a) + (S'S'_a S_a) + (S'S_a S_a)\end{aligned}$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SS_a S_a) + (S'_a S_a S_a) = (S_a S_a S_a) + (S' S_a S_a)$$
$$(SS_a S'_a) + (S'_a S_a S'_a) = (S_a S_a S'_a) + (S' S_a S'_a)$$
$$(SS'_a S'_a) + (S'_a S'_a S'_a) = (S_a S'_a S'_a) + (S' S'_a S'_a)$$

donde, sommando, si deduce:

$$(SS_a S'_a) + (SS'_a S'_a) + (SS_a S_a) + (S'_a S'_a S'_a) = (S' S'_a S_a) + (S' S_a S_a) + S' S'_a S'_a) + (S_a S_a S_a) .$$

Sottraendo, questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) - (SS_a S_a) - (S'_a S'_a S'_a)$$
$$= g(S' S'_a) + g(S' S_a) + g(S_a S_a) - (S' S'_a S'_a) - (S_a S_a S_a)$$

ossia, per le formole (5) e (7), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$p'_a - n'_a + g(SS'_a) = p_a - n_a + g(S' S_a) .$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P + n_a - p_a = P'_a - P' + n'_a - p'_a .$$

Dunque:

I. « L'espressione

$$\Delta = P_a - P + n_a - p_a + 3 \tag{15}$$

« è un invariante della varietà ».

Sostituendo ad $n_a - p_a$ il suo valore dato dalla (13), si ha ancora:

II. « L'invariante Δ è anche espresso dalla formola:

$$8\Delta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n + 15 . \tag{16}$$

4. In virtù della relazione (6), si ha:

$$g(S + S' , S + S'_a) = g(S' + S , S' + S_a)$$

donde, calcolando questi due generi segue:

$$g(SS) + g(SS'_a) + g(S' S'_a) + (SSS') + (SSS'_a) + 2(SS' S'_a)$$
$$= g(S' S') + g(S' S_a) + g(SS_a) + (S' S' S) + (S' S' S_a) + 2(S' SS_a)$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SSS) + (SSS'_a) = (SSS_a) + (SSS')$$
$$(S' S' S) + (S' S' S'_a) = (S' S' S_a) + (S' S' S')$$
$$(SS' S) + (SS' S'_a) = (SS' S_a) + (SS' S')$$

donde facilmente si deduce:

$$\begin{aligned}&(SSS') + (SSS'_a) + 2(SS'S'_a) + (S'S'S'_a) - (S'S'S')\\ &= (S'S'S) + (S'S'S_a) + 2(S'SS_a) + (SSS_a) - (SSS)\,.\end{aligned}$$

Sottraendo questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned}&g(SS) + g(SS'_a) + g(S'S'_a) - (S'S'S'_a) + (S'S'S')\\ &= g(S'S') + g(S'S_a) + g(SS_a) - (SSS_a) + (SSS)\end{aligned}$$

ossia, per le formole (5), (7) e (9), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$\Omega' + p - 2p' + 2n' + g(SS'_a) = \Omega + p' - 2p + 2n + g(S'S_a)\,.$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P - \Omega + 3p - 2n = P'_a - P' - \Omega' + 3p' - 2n'$$

Dunque:

I. « L'espressione

(17) $$\varDelta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (16) e (17) segue subito:

$$8(\varDelta^{(1)} - \varDelta) = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 39$$

e quindi posto:

(18) $$\varDelta^{(2)} = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 14$$

si ha intanto:

II. « L'espressione $\varDelta^{(2)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti $\varDelta$, $\varDelta^{(1)}$ e $\varDelta^{(2)}$ ha luogo la relazione:

(19) $$8(\varDelta^{(1)} - \varDelta) = \varDelta^{(2)} - 25\,.$$

5. In virtù del teorema V del n. 1, il grado del sistema $|S + S'_a|$ è eguale a quello del sistema $|S' + S_a|$; quindi, calcolando questi due gradi, si ha:

$$\begin{aligned}&(SSS) + 3(SSS'_a) + 3(SS'_aS'_a) + (S'_aS'_aS'_a)\\ &= (S'S'S') + 3(S'S'S_a) + 3(S'S_aS_a) + (S_aS_aS_a)\,.\end{aligned}$$

La relazione (6) dà ancora:

$$\begin{aligned}(SSS'_a) + (S'_aSS'_a) &= (S_aSS'_a) + (S'SS'_a)\\ (SS'S_a) + (S'_aS'S_a) &= (S_aS'S_a) + (S'S'S_a)\\ (S_aSS_a) + (S'SS_a) &= (SSS_a) + (S'_aSS_a)\\ (S_aS'S'_a) + (S'S'S'_a) &= (SS'S'_a) + (S'_aS'S'_a)\end{aligned}$$

donde facilmente si deduce:

$$(\mathrm{SSS}'_a) + (\mathrm{SS}'_a\,\mathrm{S}'_a) - (\mathrm{SS}_a\,\mathrm{S}_a) - (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'_a)$$
$$= (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'\,\mathrm{S}_a) + (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}_a\,\mathrm{S}_a) - (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'_a\,\mathrm{S}'_a) - (\mathrm{SSS}_a)\,.$$

Sottraendo questa eguaglianza, dopo averne moltiplicati ambo i membri per 3, dalla precedente, si ottiene:

$$(\mathrm{SSS}) + 3(\mathrm{SS}_a\,\mathrm{S}_a) + 3(\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'_a) + (\mathrm{S}'_a\,\mathrm{S}'_a\,\mathrm{S}'_a)$$
$$= (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'\,\mathrm{S}') + 3(\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'_a\,\mathrm{S}'_a) + 3(\mathrm{SSS}_a) + (\mathrm{S}_a\,\mathrm{S}_a\,\mathrm{S}_a)$$

donde, per le formole (5), (7) e (9) e le analoghe relative ai sistemi $|\mathrm{S}'|$ e $|\mathrm{S}'_a|$, segue immediatamente:

$$n_a - 3\Omega + 6p - 4n = n'_a - 3\Omega' + 6p' - 4n'\,.$$

Dunque:

I. « L'espressione

$$\Delta^{(3)} = n_a - 3\Omega + 6p - 4n - 3 \tag{20}$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (15), (17) e (20) segue subito:

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 9$$

e quindi posto:

$$\Delta^{(4)} = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 5 \tag{21}$$

si ha intanto:

II. « L'espressione $\Delta^{(4)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ ha luogo la relazione:

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta^{(4)} = \Delta - 4\,. \tag{22}$$

Infine, se dalle formole (18), (20) e (21) si ricavano i valori di Ω_a, n_a e p_a, e questi si sostituiscono nelle (11) e (12), si ottiene ancora:

IV. « Fra gli invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ hanno luogo le due relazioni:

$$\begin{cases} \Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)} \\ 2\Delta^{(4)} - 2 = 3\Delta^{(3)} \end{cases}. \tag{23}$$

Facendo le medesime sostituzioni nella formola (13), si ricava un'altra relazione fra questi stessi invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$, che è quella stessa che si otterrebbe eliminando $\Delta^{(1)} - \Delta$ fra la (19) e la (22): essa però è una conseguenza delle due precedenti (23).

Sarà dimostrato in una prossima Nota, che Δ è un invariante assoluto, mentre $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ sono invarianti relativi; ed inoltre che questi coincidono con gli invarianti $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(4)}$ e $p^{(3)}$ di Noether nel caso in cui la varietà non contenga elementi eccezionali.