ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Occupandomi della resistenza elettrica dei solenoidi per correnti alternate ho mostrato [1], in una mia antecedente Nota, che i risultati teorici, trovati su tale argomento dal Wien, praticamente valgono soltanto per correnti di bassa frequenza, per le quali del resto il valore della resistenza differisce assai poco da quello che spetta alle correnti continue.

In quella Nota io ho anche discusso i risultati teorici a cui era pervenuto posteriormente il Sommerfeld occupandosi dello stesso problema; essi si riferiscono a solenoidi ideali, che, per esempio, potrebbero costruirsi avvolgendo ad elica un nastro metallico sopra un cilindro, in modo che sia ridotto a zero lo spazio isolante compreso fra due spire consecutive. In pratica invece i solenoidi sono sempre costruiti con filo a sezione circolare, anzichè con nastro a sezione rettangolare; e ciò fa sì, che ai medesimi non possono affatto applicarsi i risultati teorici del Sommerfeld, nè per basse, nè per alte frequenze.

Veramente il Sommerfeld, confrontando la resistenza R dei suoi solenoidi ideali, supposti costruiti con nastro a sezione quadrata, con le corrispondenti resistenze R′, che l'esperienza assegna a quei solenoidi quando la loro sezione, a parità di area, venga trasformata in un cerchio, era venuto alla conclusione che fra R ed R′ c'è bensì una notevolissima discordanza — pari circa al 50 % di R′ — ma che il rapporto $\frac{R'}{R}$ è una costante γ, che ha lo stesso valore

[1] Rendiconti R. Acc. Lincei, seduta del 17 dicembre 1905, e del 4 febbraio 1906.

($\gamma = 0{,}6$) sia per le alte, che per le basse frequenze. In realtà però la costanza del rapporto $\frac{R'}{R}$, nei casi esaminati dal Sommerfeld, deve probabilmente attribuirsi più ad una casuale coincidenza, che ad una vera legge fisica. È infatti veramente improbabile che il rapporto $\frac{R'}{R}$, il quale per correnti continue ha il valore 1, debba poi acquistare, in maniera quasi discontinua, il valore 0,6 appena la corrente diviene alternata e debba conservare costantemente quel valore sia per le basse, che per le alte frequenze.

Parrebbe perfino, secondo le conclusioni del Sommerfeld, che per le alte frequenze la resistenza di un filo avvolto ad elica debba essere indipendente dal *passo* dell'elica, il che è addirittura contradetto dalle esperienze.

Se poi si volessero accettare i risultati del Sommerfeld, generalizzandoli con l'ammettere che al fattore γ debba attribuirsi un valore compreso fra 1 ed $^1/_2$ e variabile da caso a caso, è chiaro che essi lascerebbero nelle formule una indeterminazione, per effetto della quale il valore calcolato per la resistenza può subire oscillazioni che arrivano al 50 % del valore reale; senza dubbio, nella maggior parte dei casi, si otterrebbe un'approssimazione maggiore, assumendo senz'altro per valore della resistenza quello che, per correnti di quella data frequenza, si calcola colle formule che si riferiscono ai fili rettilinei. Infatti, in pratica il rapporto fra la resistenza di un filo avvolto a solenoide e la resistenza dello stesso filo disteso in linea retta si comincia sensibilmente a scostare dall'unità, solo per frequenze assai elevate; acciocchè tale rapporto possa acquistare il valore 2, si richiedono, nei casi sperimentali da me osservati [1], frequenze superiori a 100 mila alternanze per secondo.

Io ho tentato per altra via la risoluzione teorica di questo importante problema, occupandomi unicamente del caso di frequenze molto elevate, perchè per le correnti di bassa frequenza servono assai bene i risultati del Wien. Io ho fondato la mia trattazione sopra un'osservazione di carattere assai generale, la quale estende notevolmente la portata teorica delle leggi ben note, che, per i conduttori rettilinei, esprimono il localizzarsi delle correnti di alta frequenza alla superficie.

È noto che in un conduttore di forma qualsiasi le tre componenti u, v, w della densità della corrente, se questa è variabile col tempo t, soddisfanno alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma}\dfrac{\partial u}{\partial t} \\[2ex] \Delta_2 v = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma}\dfrac{\partial v}{\partial t} \\[2ex] \Delta_2 w = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \end{cases}$$

(1) Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino, 51, pag. 314.

dove

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

e le costanti μ e σ rappresentano rispettivamente la permeabilità magnetica e la resistenza specifica del conduttore.

Queste equazioni sono state integrate in due casi particolari: quello in cui il conduttore sia costituito da una piastra metallica e quello in cui il conduttore sia costituito da un cilindro pieno o cavo; nell'un caso e nell'altro, se la frequenza delle correnti è sufficientemente alta, si trova che [1], indicando con

$$w_0 = \mathrm{A} \cos \omega t$$

la densità della corrente alla superficie del conduttore e rappresentando

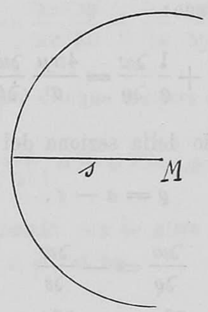

Fig 1.

quindi con ω il numero di alternanze che fa la corrente in 2π secondi, in un punto M (fig. 1) interno al conduttore e posto alla distanza s dalla superficie, la densità della corrente è

(2) $$w = \mathrm{A}e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s),$$

dove α è una costante e precisamente

(3) $$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma}}.$$

Come si vede l'ampiezza

$$\mathrm{A}e^{-\alpha s}$$

della densità della corrente decresce, con legge esponenziale, col crescere di s

[1] J. J. Thomson, *Recent Reseaches in Electricity and Magnetism*. § 257 e segg. Nel servirmi delle formole, riferite dal Thomson, io ammetto che sia $m = 0$, cioè che le dimensioni del conduttore siano trascurabili di fronte alla lunghezza d'onda delle correnti.

e ciò fa sì che, per frequenze molto alte, per le quali α ha un valore molto grande, la corrente può quasi del tutto considerarsi localizzata in un sottilissimo strato superficiale del conduttore; oltre a ciò la fase della corrente diminuisce col crescere di s, nella stessa misura con cui va crescendo, in valore assoluto, l'esponente che comparisce nella precedente espressione dell'ampiezza

Si osservi che, per conduttori cilindrici a sezione circolare, la distribuzione della corrente è simmetrica intorno all'asse del filo; perciò, assumendo questo come asse delle z, si ha $u = v = o$ e w diverso da zero e dipendente solo dalla distanza ϱ del punto generico dell'asse medesimo. Si ha quindi

$$\Delta_2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho},$$

e sostituendo nelle (1) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ora, indicando con a il raggio della sezione del filo, si ha

$$\varrho = a - s,$$

quindi

$$\frac{\partial w}{\partial \varrho} = -\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

e sostituendo nella precedente equazione,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{4}$$

D'altra parte è facile verificare che l'espressione (2) soddisfa alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{5}$$

Si è dunque condotti ad ammettere, che per frequenze molto elevate, nell'equazione (4) il termine

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti, ossia che il conduttore si comporta come se il raggio di curvatura ϱ della sezione del filo fosse infinitamente grande.

Considero adesso il caso generale di un conduttore di forma qualsiasi. Io suppongo che siano noti i coseni di direzione α, β, γ della corrente; allora, indicando con φ la grandezza della densità della corrente nel punto di coordinate x, y, z, si ha:

$$u = \varphi\alpha \qquad v = \varphi\beta \qquad w = \varphi\gamma\,,$$

ed una qualunque delle equazioni (1) può servire alla determinazione effettiva di φ. Per maggior simmetria di trattazione è più vantaggioso servirsi di una loro particolare combinazione lineare. Si osservi a tal uopo che

$$\Delta_2 u = \alpha\Delta_2\varphi + 2\nabla(\alpha\,,\varphi) + \varphi\Delta_2\alpha\,,$$

dove Δ_2 ha il significato anzidetto e ∇ è il simbolo del parametro differenziale misto, cioè

$$\nabla(\alpha\,,\varphi) = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.$$

La prima delle (1) si può dunque mettere sotto la forma:

$$\left\{\Delta_2\varphi - 4\pi\mu\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\alpha + 2\,\nabla(\alpha\,,\varphi) + \varphi\Delta_2\alpha = 0\;;$$

moltiplicando per α e sommando con le altre due equazioni analoghe, che riguardano le componenti v e w, si ha

$$(6)\qquad \Delta_2\varphi - 4\pi\mu\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\left\{\alpha\nabla(\alpha\,,\varphi) + \beta\nabla(\beta\,,\varphi) + \gamma\nabla(\gamma\,,\varphi)\right\} + $$
$$+ \varphi\left\{\alpha\Delta_2\alpha + \beta\Delta_2\beta + \gamma\Delta_2\gamma\right\} = 0\,.$$

Porrò per brevità

$$(7)\qquad \begin{gathered} \alpha\nabla(\alpha\,,\varphi) + \beta\nabla(\beta\,,\varphi) + \gamma\nabla(\gamma\,,\varphi) = \mathrm{E} \\ \alpha\Delta_2\alpha + \beta\,\Delta_2\beta + \gamma\,\Delta_2\gamma = -\,\mathrm{D}\,, \end{gathered}$$

e riguardo alla E osservo subito che, ordinando i suoi termini secondo le derivate di φ, si ha

$$\mathrm{E} = \left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + $$
$$+ \left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + $$
$$+ \left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.$$

Ora dall'identità

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

si ottiene derivando rapporto ad x

(8) $$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

e similmente, derivando rapporto ad y ed a z, si ottiene

(9) $$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0$$

(10) $$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Si ha dunque identicamente

$$\mathrm{E} = 0.$$

Quanto all'altra espressione, rappresentata con $-\mathrm{D}$, essa si può anzitutto semplificare facendovi comparire le derivate prime di α, β e γ, invece delle derivate seconde. Infatti, derivando rapporto ad x la (8), si ottiene

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -\left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2 \right\};$$

analogamente dalle (9) e (10) si ha

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = -\left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2 \right\}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = -\left\{ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2 \right\}.$$

Da queste tre relazioni, sommando membro a membro, si ricava

(11) $$\mathrm{D} = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma,$$

dove

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Attribuendo dunque a D o il significato espresso dalla (11) o quello equivalente espresso dalla (7), si ha

(12) $$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{D} . \varphi .$$

Nel caso che la corrente abbia direzione costante, α, β, γ sono costanti e quindi $\mathrm{D} = 0$; allora φ soddisfa alle stesse equazioni, a cui soddisfa una qualunque delle sue componenti.

Ma se la direzione della corrente non è costante, D in generale riesce diversa da zero e l'equazione (12) a cui soddisfa la grandezza φ della densità della corrente risulta in generale diversa da quelle a cui soddisfanno le componenti u, v, w della densità medesima.

L'importanza più o meno grande che nei casi più comuni può assumere il termine $D \cdot \varphi$ rispetto ai rimanenti che entrano nell'equazione (12), è subordinata alla natura delle espressioni effettive di α, β e γ in funzione di x, y, z.

Limitando le mie considerazioni al caso più interessante per il problema che io mi sono proposto, supporrò che, almeno entro un campo sufficientemente ristretto intorno ad un punto generico qualsiasi del conduttore, le linee di corrente possano approssimatamente considerarsi come archi di cerchi aventi tutti un medesimo asse. Assumendo quest'asse per asse delle z ed orientando convenientemente gli altri due assi coordinati, le coordinate x, y, z del punto generico di una particolare linea di corrente il cui raggio sia r, si possono esprimere con formole del tipo:

$$x = r \cos \lambda$$
$$y = r \operatorname{sen} \lambda$$
$$z = \text{costante}.$$

Ora la tangente nel punto generico di quest'arco segna la direzione della corrente; si ha dunque derivando rispetto a λ,

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e analogamente

$$\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \gamma = 0 .$$

Se ne deduce facilmente che è

$$D = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma = \frac{1}{r^2} .$$

L'equazione (7) diventa dunque:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \varphi .$$

Nella generalità dei casi le linee di corrente hanno una curvatura trascurabile e quindi questa equazione si può scrivere semplicemente così:

(8) $$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Per venire adesso alla generalizzazione sopra accennata, si consideri la famiglia di superficie, su ciascuna delle quali la densità della corrente abbia un valore costante φ.

Sia
$$z = z(x, y)$$
una di queste superficie. Suppongo che l'origine delle coordinate appartenga alla superficie e che gli assi delle x e y siano orientati come le tangenti alle linee principali di curvatura.

Colle notazioni di Monge
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
indicando con f una funzione qualsiasi delle coordinate x, y, z di un punto generico, si cerchino anzitutto le espressioni delle due derivate totali $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ intendendo che tali derivate siano calcolate col vincolare il punto a muoversi sulla superficie $z = z(x, y)$; si ha evidentemente
$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z};$$
e derivando una seconda volta:
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + t \frac{\partial f}{\partial z},$$
dove mancano i termini in p e q, perchè queste formule si intendono riferite all'origine, nella quale, per il modo con cui sono stati orientati gli assi, è $p = q = 0$.

In queste due ultime formule si ponga φ al posto di f e si ricordi che sulla superficie $z = z(x, y)$ è $\varphi =$ costante, e quindi $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$; ne segue senz'altro che
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -r \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -t \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
onde
$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (r + t) \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$
ossia, indicando con s la distanza normale della superficie $z = z(x, y)$ e

ricordando che

$$r+t=\frac{1}{\varrho},$$

dove $\frac{1}{\varrho}$ è la curvatura media della superficie medesima, si ha

$$\Delta_2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial s};$$

e sostituendo in (8) si ottiene finalmente

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{9}$$

Come si vede, questa formula coincide con quella (4), che vale pei conduttori cilindrici a sezione circolare, e si può ritenere come una generalizzazione di quest'ultima, ottenuta con l'attribuire ad $\frac{1}{\varrho}$ il significato di curvatura media della superficie, sulla quale è costante la grandezza φ della densità della corrente.

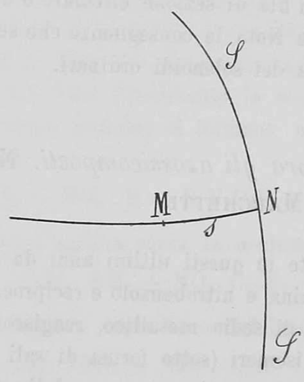

Fig. 2.

Come nella (4) il termine $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}$, per correnti di alta frequenza, è trascurabile di fronte agli altri due, così si è indotti a ritenere che anche nella (9) il termine

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti e con grande approsimazione si può sostituire alla (9) l'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=\frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Conseguentemente, indicando con φ_0 il valore della grandezza della densità della corrente sopra una delle superficie, sulle quali è $\varphi=$ costante e considerando un arco $\mathrm{MN}=s$ (fig. 2) di una delle traiettorie ortogonali alla famiglia delle superficie medesime, contato a partire dalla superficie fissa S, per la quale $\varphi = \varphi_0$, si ha:

$$\varphi = {}_0\varphi e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s) \tag{10}$$

dove, al solito

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}}. \tag{11}$$

Dunque *per correnti di alta frequenza nel passaggio da una superficie all'altra della famiglia di superficie, sulle quali* R = *costante, la densità della corrente varia con le stesse leggi che si riferiscono ai conduttori cilindrici ed alle lastre piane.* Questa appunto è la generalizzazione, a cui è stato accennato da principio.

Essa è applicabile a tutti i casi in cui le linee di corrente siano cerchi di diametro molto grande aventi un medesimo asse, siano essi formati con spire di ugual diametro o di diametro differente, con spire di passo costante o di passo variabile, con filo di sezione circolare o di sezione differente ecc.

Mostrerò in un'altra Nota le conseguenze che se ne possono trarre relativamente alla resistenza dei solenoidi ordinari.

Chimica. — *Sopra gli azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di G. Marchetti.

Le ricerche eseguite in questi ultimi anni da uno di noi hanno dimostrato che l' idrossilammina e nitrobenzolo e reciprocamente il nitrato di etile ed anilina, in presenza di sodio metallico, reagiscono fra di loro per dare origine a due prodotti isomeri (sotto forma di sali sodici) la cui struttura è senza dubbio da rappresentarsi per mezzo delle formole:

$$C_6H_5\,.\,\underset{\underset{O}{\|}}{N} = N(OH)$$

$$C_6H_5\,.\,N = \underset{\underset{O}{\|}}{N}(OH)$$

L' una differisce dall' altra per la diversa posizione cui è unito l' atomo di ossigeno nell' idrato di diazobenzolo da cui si possono immaginare derivate:

$$C_6H_5\,.\,N = N(OH)\ .$$

Siccome taluni ammettono che tali composti contengano l' anello: