ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Sul Principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito.* Nota di E. ALMANSI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Socio U. DINI.

Matematica. — *Sopra una ricerca di limite.* Nota di ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Corrispondente E. CESÀRO.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Corrispondente E. CESÀRO.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di BEPPO LEVI, presentata dal Socio C. SEGRE.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques.* Nota di NIELS NIELSEN, presentata dal Socio U. DINI.

§ 1. *Développements des deux produits* $J^{\nu}(x)\,J^{\pm\nu}(ix)$. — Dans mon *Traité des fonctions cylindriques* (¹) j'ai donné la formule générale

$$J^{\nu}(\alpha x)\,J^{\rho}(\beta x) = \alpha^{\nu}\,\beta^{\rho}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^{s}\,A_{s}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho+2s}, \tag{1}$$

où il faut admettre

$$A_{n} = \frac{\alpha^{2n}\cdot F\left(-\nu-n\,,\,-n\,,\,1+\varrho\,,\,\frac{\alpha^{2}}{\beta^{2}}\right)}{n\,!\,\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}\,; \tag{2}$$

il saute aux yeux que le cas particulier $\alpha=\beta=1$ présente un intérêt par-

(¹) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 20. Leipzig 1904.

ticulier, parce que la formule de Gauss nous permet de donner sous simple forme la série hypergéométrique qui figure au second membre de (2).

Or, il est très intéressant, ce me semble, que ces deux autres cas particuliers $\alpha = 1$, $\beta = i$, $\varrho = \pm \nu$ nous conduisent à des résultats analogues et aussi simples que le précédent.

En effet, étudions tout d'abord le cas $\varrho = \nu$, il s'agit de déterminer sous simple forme la série hypergéométrique

$$F(-\nu - n, -n, 1+\nu, -1) = 1 + \\ + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \frac{(\nu+n)(\nu+n-1)\ldots(\nu+n-s+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s)}.$$

Cela posé, remarquons que nous avons évidemment

$$F(-\nu-2n-1, -2n-1, 1+\nu, -1) = 0,$$

ce qui s'accorde bien avec la forme même de la série ordinaire qui représente la fonction cylindrique de première espèce, il ne nous reste qu'à la détermination de la somme susdite pour des valeurs *paires* de n.

A cet effet, écrivons sous cette forme plus simple la somme dont il s'agit

$$(3)\begin{cases} S_n(\nu) = 2 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} \cdot \frac{(\nu+2n)(\nu+2n-1)\ldots(\nu+2n-s+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+s)} + \\ \qquad + (-1)^n \binom{2n}{n} \cdot \frac{(\nu+2n)(\nu+2n-1)\ldots(\nu+n+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}, \end{cases}$$

nous aurons, après une simple réduction, cette équation aux différences finies

$$(4) \qquad S_n(\nu+1) - S_n(\nu) = \frac{2n(2n-1)}{(\nu+1)(\nu+2)} \cdot S_{n-1}(\nu).$$

Remarquons ensuite qu'un calcul direct donnera, en vertu de (3), pour de petites valeurs de r, une expression de la forme

$$(5) \qquad S_r(\nu) = (-1)^r \frac{(2)r!}{r!} \cdot \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+r)},$$

puis supposons vraie pour $r = n-1$ la formule (5), l'équation aux différences finies (4) aura comme solution générale une fonction de la forme

$$(6) \qquad f_n(\nu) = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)} + C(\nu),$$

où $C(\nu)$ désigne une fonction arbitraire assujettie à satisfaire à la condition de périodicité $C(\nu+1) = C(\nu)$.

Or, dans le cas particulier, où la fonction $f_n(\nu)$ est une fonction *rationnelle* de ν, $C(\nu)$ doit être indépendante de ν, de plus, remarquons l'identité $S_n(\infty) = 0$, tirée directement de (3), nous aurons dans le cas particulier susdit $C(\nu) = 0$, ce qui montrera clairement que la formule (5) est vraie pour une valeur quelconque de r.

Cela posé, la formule générale (1) donnera finalement la série de puissances très intéressante

$$(7) \qquad J^{\nu}(x)\, J^{\nu}(ix) = i^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+4s}}{s!\, \Gamma(\nu+s+1)\, \Gamma(\nu+2s+1)},$$

qui est certainement nouvelle.

Dans le second cas $\rho = -\nu$, il s'agit de trouver sous simple forme la somme

$$F(-\nu-n, -n, 1-\nu, -1).$$

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de Gauss [1]

$$(\beta-1-(\gamma-\alpha)x) \,.\, F(\alpha,\beta,\gamma+1,x) + (\gamma-\beta+1)\cdot F(\alpha,\beta-1,\gamma+1,x) = \\ = \gamma(1-x)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

nous aurons immédiatement

$$F(-1-\nu-n, -n, -\nu, -1) = \\ = -\frac{n+1-\nu}{2\nu}\cdot F(-1-n-\nu, -n-1, 1-\nu, -1),$$

d'où après une simple réduction

$$F(-\nu-2n, -2n, 1-\nu, -1) = \frac{2^n\cdot(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+2n-1)}{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\left(2-\frac{\nu}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$F(-\nu-2n-1, -2n-1, 1-\nu, -1) = -\frac{2^n\cdot\nu(\nu+2)\ldots(\nu+2n)}{\frac{1-\nu}{2}\cdot\frac{3-\nu}{2}\ldots\frac{2n+1-\nu}{2}}$$

ce qui donnera en vertu des propriétés fondamentales et très connues de la fonction gamma:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} i^{\nu} J^{\nu}(x)\, J^{-\nu}(ix) &= \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\, \Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)} \\ &- \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\, \Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

[1] *Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita* etc. § 8. Comment. Gotting. t. 2; 1813.

d'où en mettant $-ix$ au lieu de x, ces deux formules plus élégantes

$$(9)\quad \begin{cases} i^{\nu}\,\mathrm{J}^{\nu}(x)\,\mathrm{J}^{-\nu}(ix) + i^{-\nu}\,\mathrm{J}^{\nu}(ix)\,\mathrm{J}^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2\cos\dfrac{\pi\nu}{2}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\,\Gamma\left(s+\dfrac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\dfrac{2-\nu}{2}\right)} \\ i^{\nu}\,\mathrm{J}^{\nu}(x)\,\mathrm{J}^{-\nu}(ix) - i^{-\nu}\,\mathrm{J}^{\nu}(ix)\,\mathrm{J}^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2\sin\dfrac{\pi\nu}{2}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\,\Gamma\left(s+\dfrac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\dfrac{3-\nu}{2}\right)}; \end{cases}$$

les trois dernières formules sont certainement nouvelles aussi.

§ 2. *Applications: Equation différentielle, intégrales définies.* — Le développement trouvé de (8) pour la fonction

$$y = \mathrm{J}^{\nu}(\sqrt{x})\,\mathrm{J}^{\nu}(\sqrt{-x})$$

nous conduira naturellement à chercher pour y une équation différentielle de la forme

$$(10)\qquad y^{(4)} + \frac{a}{x}\,y^{(3)} + \frac{b}{x^2}\,y^{(2)} + \frac{c}{x^3}\,y^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{d}{x^4}\right)y = 0\,.$$

A cet effet, introduisons dans (10) la série susdite, puis mettons

$$\omega = \nu + 2s\quad,\quad s = \frac{\omega-\nu}{2}\quad,\quad s+\nu = \frac{\omega+\nu}{2}\,,$$

il résulte, en cherchant le coefficient de la puissance $x^{\nu+2s-4}$, une condition de la forme

$$\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3) + a\,\omega(\omega-1)(\omega-2) + b\,\omega(\omega-1) + c\,\omega + d + \\ + 4\alpha\,\omega(\omega-1)(\omega^2-\nu^2) = 0$$

qui doit être satisfaite par une infinité de valeurs de ω, ce qui donnera immédiatement l'équation différentielle cherchée

$$(11)\qquad y^{(4)} + \frac{5}{x}\,y^{(3)} + \frac{4-\nu^2}{x^2}\,y^{(2)} - \frac{1}{4x^2}\cdot y = 0\,,$$

qui est extrêmement simple.

Cherchons maintenant l'intégrale complète de (11) en y introduisant la série

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty} c_s\cdot x^{k+2s}\,,$$

nous aurons, après une légère transformation de la variable indépendante, la proposition suivante:

L'intégrale complète de l'équation différentielle

$$(12)\qquad Z^{(4)} + \frac{4}{x}\cdot Z^{(3)} + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\cdot Z^{(2)} - \frac{1-4\nu^2}{x^3}\cdot Z^{(1)} - 4Z = 0$$

se présente sous la forme

$$(13)\quad Z = c_1 J^\nu(x)\, J^\nu(ix) + c_2 J^\nu(x)\, Y^\nu(ix) + c_3 J^\nu(ix)\, Y^\nu(x) + c_4 Y^\nu(x)\, Y^\nu(ix),$$

où Y *désigne la fonction cylindrique de seconde espèce, tandis que les* c *sont des constantes par rapport à* x.

Comme une autre application des formules du § 1 nous avons à déterminer quelques intégrales définies d'une simple forme.

A cet effet, appliquons tout d'abord l'intégrale *eulérienne* de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu} \quad , \quad \Re(x) \geqq 0 \quad , \quad \Re(\nu) > 0,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (7) et (8), ces deux formules intégrales

$$(14)\qquad \int_0^\infty J^\nu(\sqrt{2+x})\, J^\nu(\sqrt{-2+x})\, e^{-t}\, dt = J^\nu(ix)$$

$$(15)\qquad i^\nu \int_0^\infty J^\nu(\sqrt{2+x})\, J^{-\nu}(\sqrt{-2+x})\, e^{-t}\, dt = \Pi^\nu(ix) - i\, X^\nu(ix),$$

où Π et X désignent les fonctions de Poisson-Anger [1], savoir:

$$\Pi^\nu(x) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)}$$

$$X^\nu(x) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)};$$

dans (14) il faut supposer $\Re(\nu) > -1$, tandis que (15) est valable pour une valeur finie quelconque de ν.

Cela posé, appliquons la formule de Weierstrass [2]

$$(16)\qquad \frac{1}{\Gamma(\varrho)} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_w e^t\cdot t^{-\varrho}\, dt,$$

[1] Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 47. Leipzig 1904.

[2] Voir mon: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 147. Leipzig 1906.

où w désigne un chemin d'intégration qui renferme l'axe des nombres négatifs avec l'orgine en entourant dans le sens direct ce dernier point, nous aurons immédiatement ces inversions des formules (14) (15)

$$\text{(17)} \qquad J^{\nu}(\sqrt{x})\, J^{\nu}(\sqrt{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{w} \frac{e^t}{t} \cdot J^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right) dt$$

$$\text{(18)} \qquad J^{\nu}(\sqrt{x})\, J^{-\nu}(\sqrt{-x}) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi i} \cdot \int_{w} \frac{e^t}{t} \left(\Pi^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right) - X^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right)\right) dt,$$

formules qui sont valables pour des valeurs finies quelconques de x et ν.

§ 3. *Séries analogues à celles de C. Neumann.* — L'intégrale curviligne (17) que nous venons de développer est d'un grand intérêt.

En effet, considérons en premier lieu cette série *neumanienne* de première espèce [1]

$$\text{(19)} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s)\, \Gamma(\nu + s)}{s\,!} \cdot J^{\nu+2s}(x),$$

valable pour une valeur finie quelconque de x, tandis que ν ne doit pas être égal à un négatif entier, les formules (16), (17) donnent immédiatement ce développement analogue

$$\text{(20)} \qquad \frac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s)\, \Gamma(\nu + s)}{s\,!}\, J^{\nu+2s}(\sqrt{x})\, J^{\nu+2s}(\sqrt{-x}),$$

valable où l'est (19).

En second lieu introduisons la série *kapteynienne* [2] de première espèce

$$\text{(21)} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \nu^2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu + s)}{s\,!\,(\nu + 2s)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+2s}((\nu + 2s)\, x),$$

où ν ne doit pas être égal à un négatif entier; dans le cas $\nu = 0$, la formule (21) se réduit à l'identité $1 = 1$, tandis que la série générale (21) est certainement absolument convergente pourvu que $|x| < \omega$, où ω désigne la racine positive de cette équation transcendante

$$\frac{x}{2} \cdot e^{1+\frac{x^2}{4}} = 1 \quad , \quad \omega = 0{,}659\ldots$$

Cela posé, nous aurons évidemment, en vertu de (17), ce développement analogue

$$\text{(22)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} = \nu^2 \cdot & \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\ (\nu + s)}{s\,!\,(\nu + 2s)^{\nu+1}} \cdot \\ & \cdot J^{\nu+2s}\left(\sqrt{(\nu + 2s)\, x}\right) \cdot J^{\nu+2s}\left(\sqrt{-(\nu + 2s)\, x}\right) \end{aligned} \right.$$

[1] Zylinderfunktionen, p. 273.
[2] Ibid., p. 303.

qui est valable pour une valeur finie quelconque de x, pourvu que ν ne soit pas égal à un négatif entier.

Considérons maintenant la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{4}\right) + a_2\left(\frac{x}{4}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots \tag{23}$$

dont le rayon de convergence et égal à ϱ, puis mettons dans (21) (22) $\nu+1, \nu+2, \nu+3, \ldots$ au lieu de ν, une application de la méthode que j'ai expliquée dans mes recherches sur les séries *neumanniennes* (1) donnera ce théorème nouveau :

La série de puissances (23) *est développable en séries de fonctions cylindriques, comme suit:*

$$f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot \mathrm{A}_s \cdot \mathrm{J}^{\nu+s}(\sqrt{x})\, \mathrm{J}^{\nu+s}(\sqrt{-x}) \tag{24}$$

$$f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot \mathrm{B}_s \cdot \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{(\nu+s)\,x}\right) \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{-(\nu+s)\,x}\right), \tag{25}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathrm{A}_n = (\nu+n) \cdot \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s} \tag{26}$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)^2}{s!\,(\nu+n)^{n-2s}} \cdot \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s}: \tag{27}$$

Les deux séries ainsi obtenues et la série de puissances donnée sont en même temps convergentes, oscillantes ou divergentes, et la convergence est toujours du même caractère: absolue ou non, uniforme ou non.

Remarquons encore que les deux séries (24) et (25) présentent la même analogie que j'ai développée, dans mon *Traité* (2) susdit, entre les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*.

On voit du reste que les deux coefficients A_n et B_n deviennent généralement plus compliqués que ceux obtenus en développant en séries *neumanniennes* ou *kapteyniennes* la même fonction $f(x)$. La raison de ce fait est à chercher dans le diviseur $\Gamma(\nu+1)$ qui figure aux premiers membres des deux développements fondamentaux (20) et (22).

(1) Loc. cit. p. 266.
(2) Zylinderfunktionen, p. 303.

Considérons maintenant ce développement bien connu (¹)

$$(28)\quad J^{\nu}(\alpha x)=\alpha^{\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)}\cdot F(\nu+s\,,-s\,,\nu+1\,,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(x)$$

applicable pour des valeurs finies quelconques de x et α, la formule (17) donnera immédiatement la formule analogue:

$$(29)\quad J^{\nu}(\sqrt{\alpha x})\,J^{\nu}(\sqrt{-\alpha x})=\alpha^{\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)}\cdot$$

$$\cdot F(\nu+s\,,-s\,,\nu+1\,,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(\sqrt{x})\,J^{\nu+2s}(\sqrt{-x})\,,$$

qui est valable où l'est (28).

Pour accentuer la flexibilité extrêmement grande des fonctions cylindriques nous avons à citer encore ces développements particuliers

$$(30)\qquad 1=\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s\,J^{\nu+2s}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s\,(J^s(x))^2=\sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s\,J^s(x)\,J^s(ix)\,,$$

où nous avons posé pour abréger $\varepsilon_0=1$; $\varepsilon_s=2$ pour $s\geqq 1$. Les deux dernières de ces formules (30) sont des conséquences immédiates de la première, comme le montrent clairement la formule intégrale (17) et une formule analogue que j'ai développée dans une Note qui paraîtra dans le Journal de Crelle.

Fisica. — *Separazione quantitativa del radiotorio dai fanghi di Echaillon e Salins Moutier* (²) Nota di O. Angelucci, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fin dai primi studi di Blanc (³) *Sui costituenti radioattivi dei sedimenti di Echaillon e Salins Moutiers* veniva dimostrata chiaramente la stretta analogia che la nuova sostanza radioattiva ha col torio. Era dunque di grande interesse poterne avere a disposizione una certa quantità per completarne lo studio fisico, e per stabilire, ove fosse possibile, oltre al peso atomico, qualche tipo di combinazione che permettesse di classificare il nuovo elemento nel sistema di Mendelejeff.

Contemporaneamente a Blanc, Hahn (⁴) aveva intrapreso questo studio, e dalle misure eseguite da Sackur (⁵) e da altri, riuscì a stabilire la so-

(¹) Loc. cit. p. 275.
(²) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-Farmaceutico della R. Università di Roma.
(³) Phil. Mag., gennaio 1905; Comptes Rendus 1^er^. Congrès Radiologie, Liège, 1906; Rendic. Acc. Lincei, XIV, 2° sem. pag. 322; XV, 1° sem. pagg. 328, 349.
(⁴) Z. ph. Ch. 51, 717.
(⁵) Ber. 38, 1756.