

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 maggio 1906.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

1. In due Note aventi per titolo: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici — Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* ⁽¹⁾, ho considerate le distorsioni di un cilindro cavo di rivoluzione dovute ad un taglio radiale e ad un taglio a faccie parallele, cioè le distorsioni d'ordine 6 e d'ordine 2 ⁽²⁾. Volendo considerare tutte le distorsioni possibili dovremo dunque esaminare quelle di ordini 1, 3, 4, 5.

Ma quelle di ordine 1 possono senz'altro ricondursi a quelle d'ordine 2 mediante un semplice cambiamento di assi coordinati e così pure quelle di ordini 4 e 5 sono riconducibili l'una all'altra con un analogo cambiamento di assi. Restano dunque da studiare le sole distorsioni di ordine 3 e di ordine 4. Osserviamo che il calcolo della deformazione del cilindro si è eseguito coll'eliminare tutte le azioni lungo le superficie laterali mantenendo solo le azioni sulle basi. Ora nelle formole che ho date (nella Nota ⁽³⁾) avente per titolo: *Un teorema sulla teoria della elasticità*) sulle distorsioni d'ordine 3, sono già eliminate le azioni laterali. Vi è perciò da approfondire solamente il caso delle distorsioni d'ordine 4.

⁽¹⁾ Seduta del 18 giugno 1905 e Comunicazioni del 1° ottobre 1905.

⁽²⁾ *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Seduta del 2 aprile 1905.

⁽³⁾ Seduta del 5 febbraio 1905, Art. III, Esempio 2°.

Mostreremo in questa Nota che anche questo caso è riconducibile a quello della distorsione d'ordine 2 ⁽¹⁾ e perciò potremo dire che *il problema della deformazione di un cilindro di rivoluzione cavo, che ha subito la distorsione più generale, e che non è sollecitato lateralmente, ma solo alle basi, resta risoluto.*

Abbiamo poi veduto come, eliminando anche le sollecitazioni alle basi, si possa ottenere *in maniera approssimata* la forma che assume il cilindro in virtù della pura distorsione senza che esistano sollecitazioni esterne.

2. Nelle formule trovate nell'Art. III della mia Nota: *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* ⁽²⁾ facciamo successivamente

$$l = n = p = q = r = 0$$

e

$$l = m = n = q = r = 0;$$

otterremo rispettivamente i valori seguenti per i secondi membri:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{2\pi} m \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \\ 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi} pz \log(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{2\pi} pz \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \\ -\frac{1}{2\pi} py \operatorname{arco} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{4\pi} px \log(x^2 + y^2). \end{array} \right.$$

Le (1) danno gli spostamenti corrispondenti ad una distorsione di ordine 2 e le (2) quelli corrispondenti ad una distorsione di ordine 4. Ora è facile riconoscere che le prime due espressioni (2) possono ricavarsi dalle corrispondenti (1) moltiplicando quest'ultime per $\frac{p}{m} z$. D'altra parte nella Nota: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi*, § 2 ⁽³⁾, abbiamo mostrato che nel caso di un cilindro cavo di rivoluzione le cui superficie laterali hanno i raggi R_1 e R_2 possono eliminarsi le tensioni lungo le superficie

(1) Il metodo tenuto è analogo a quello impiegato dal prof. Almansi nella sua Memoria: *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente*. Sedute del 5 e 19 maggio 1901.

(2) Seduta del 19 febbraio 1905.

(3) Vedi Nota precedentemente citata, § 2.

3. Delle tre equazioni indefinite dell'equilibrio elastico

$$K \mathcal{A}^2 u + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$K \mathcal{A}^2 v + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

$$K \mathcal{A}^2 w + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

in cui

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

le prime due sono soddisfatte dai valori (4) e la terza diviene

$$(6) \quad K \mathcal{A}^2 \Phi + (L + K) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0.$$

Chiamiamo $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ le sei caratteristiche delle tensioni corrispondenti agli spostamenti (4). Si verifica facilmente che, lungo le superficie laterali del cilindro cavo, si ha

$$t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = 0$$

$$t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = 0$$

$$t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz = 0$$

$$= \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos ny.$$

ove n denota la normale al contorno. Quindi, affinchè gli spostamenti (4) corrispondano a tensioni laterali nulle, sarà necessario e sufficiente che

$$(7) \quad \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cos ny = 0.$$

4. Il problema è quindi ricondotto a determinare la funzione $\Phi(x, y)$ nello spazio ω compreso entro due circonferenze σ_1 e σ_2 di raggi R_1 e R_2 aventi il centro nell'origine, la quale soddisfa in questo campo all'equazione differenziale

$$(6') \quad \mathcal{A}^2 \Phi = - \frac{L + K}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

e al contorno alla condizione

$$(7') \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial n} - (U \cos nx + V \cos ny).$$

Ora con calcoli facili la (6') si trasforma in

$$(6'') \quad \Delta^2 \Phi = -p \frac{L+K}{\pi(L+2K)} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right)$$

e la (7') in

$$(7'') \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi} \left(\frac{L+3K}{L+2K} \log R_1 + 1 - \frac{K}{L+2K} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \vartheta, \text{ sopra } \sigma_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi} \left(\frac{L+3K}{L+2K} \log R_2 + 1 - \frac{K}{L+2K} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \vartheta, \text{ sopra } \sigma_2 \end{cases}$$

in cui

$$\cos \vartheta = \cos nx.$$

Si verifica poi facilmente che

$$\int_{\omega} \Delta^2 \Phi d\omega + \int_{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma_2 = 0$$

supponendo di prendere la normale n diretta verso l'interno del campo ω . Infatti ciascuno dei tre integrali della formola precedente è separatamente nullo. Ne segue che le condizioni (6') e (7') sono fra di loro compatibili.

Posto

$$(8) \quad \Phi = -\frac{p}{2\pi} \frac{L+K}{L+2K} \left(\log r - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) x + \Psi$$

avremo che la (6') si trasformerà in

$$\Delta^2 \Psi = 0$$

e la (7'') in

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left(1 + 2 \log R_1 + \frac{3L+K}{2K} \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \vartheta, \text{ sopra } \sigma_1 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left(1 + 2 \log R_2 + \frac{3L+K}{2K} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cos \vartheta, \text{ sopra } \sigma_2 \end{cases}$$

Quindi

$$\Psi = Mx + N \frac{x}{r^2}$$

con M e N costanti. Queste si calcolano facilmente e si trova

$$(9) \quad \Psi = -\frac{p}{2\pi} \frac{Kx}{L+2K} \left\{ \left(\frac{3L+K}{2K} + \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) + \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right) \right\}$$

da cui finalmente combinando le formole (5'), (8) e (9) si ricava il valore di w .

Tenendo quindi presenti le formule (4) e (5) avremo

$$(A) \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{p z}{2\pi} \left\{ \frac{K}{L+2K} \log r + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2] \right\}, \\ v &= \frac{p z}{2\pi} \left\{ \arctan \frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)} \left(r^2 - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}, \\ w &= -\frac{p y}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} - \frac{p x}{2\pi} \frac{K}{L+2K} \left\{ \frac{3L+K}{2} \frac{1}{K} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} - \log r + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2} \left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{3L+K}{2K} \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{L+K}{K} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} \right\} \end{aligned} \right.$$

e da queste equazioni si ricava facilmente

$$(B) \left\{ \begin{aligned} t_{33} &= \frac{pKL}{\pi(L+2K)} xz \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \\ t_{13} &= 2K \left(U + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ t_{23} &= 2K \left(V + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right.$$

onde sono determinate le tensioni agenti sulle due basi.

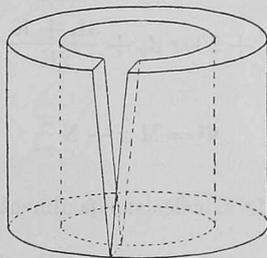


FIG. 1.

5. Per ottenere praticamente una distorsione d'ordine 4 basta fare nel cilindro cavo una *fessura cuneiforme* come è indicato nella fig. 1 in modo che le due faccie della fessura si incontrino lungo un raggio di una delle due basi. Quindi accostare le due faccie della fessura e saldarle. Se le due

facce della fessura sono egualmente inclinate sulla base, la forma del solido deformato dopo la saldatura è simmetrico rispetto al piano di questa.

Applicando ai risultati del paragrafo precedente dei ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo fatto nelle due Note precedenti, sarebbe a priori possibile formarsi un'idea approssimata della forma che assume il cilindro per la *pura distorsione* allorchè si immaginano eliminate le tensioni alle basi.

Noi ci limitiamo però a riprodurre (figg. 2 e 3) l'immagine di un cilindro di *caoutchouc* che ha subita la indicata distorsione. Le due fotografie

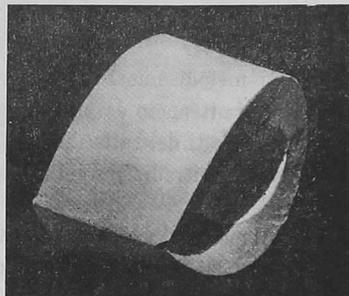


FIG. 2.

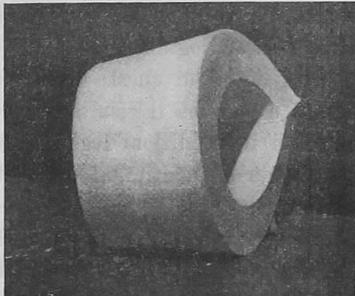


FIG. 3.

(figg. 2 e 3) dello *stampo in gesso* del solido deformato, veduto da due parti diverse, mostrano chiaramente la forma delle due basi. Lo spigolo corrisponde alla saldatura. Il cilindro di *caoutchouc* aveva prima della distorsione il diametro esterno di 10^{cm},6, quello interno di 6^{cm}, l'altezza di 5^{cm},9. L'apertura angolare della fessura cuneiforme era di circa 38°.

Debbo ringraziare l'ing. E. Jona del modello in *caoutchouc* che mi ha procurato, i dottori Zambiasi e Pochettino delle fotografie ed il prof. Alessandrini del disegno eseguito.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio.* Nota del Socio G. KÖRNER.

Nonostante il grandissimo numero di ricerche eseguite dai più insigni chimici intorno ai prodotti alogeno- e nitrosostituiti della benzina, questo gruppo di sostanze presenta tuttora non poche lacune essendo rimasti sconosciuti in quasi ogni serie alcuni dei termini più semplici e più importanti dal punto di vista, di stabilire la dipendenza delle proprietà fisiche e chimiche dalla composizione e costituzione di essi prodotti. Inoltre la letteratura è gremita di dati erronei, provenienti anche dal fatto che in epoche diffe-