ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

successivo intervallo, relativamente più ampio, compreso fra il periodo

$$T = 3{,}0 \times 10^{-6}$$

e il periodo

$$T = 2{,}2 \times 10^{-6}$$

mantenere un valore costante.

Per avvalorare le mie conclusioni con una maggior copia di dati sperimentali, ho già da qualche tempo ripreso le misure di resistenza di speciali solenoidi per correnti di alta frequenza, e fra poco ne comunicherò i risultati a questa Accademia.

Finalmente è da rilevarsi che il coefficiente di proporzionalità K dipende certamente dal passo della spirale, e dai ragionamenti da me fatti per venire alla formola finale si capisce che, col crescere del passo, diminuisce il valore del coefficiente b che comparisce nella (1) e con esso il valore della costante K. Anche ciò è pienamente confermato dalle esperienze da me riferite a pag. 375 del citato lavoro.

Meccanica. — *Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito.* Nota di G. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

1. È oggetto di questa Nota esaminare se il *Principio dei lavori virtuali*, in quanto rappresenta la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, non possa applicarsi a quei sistemi di corpi fra le cui superficie si esercita attrito.

Dallo studio di alcuni casi fra i più semplici, apparirà chiaramente quali ipotesi è necessario fare affinchè il detto Principio possa ritenersi valido.

2. Consideriamo da prima un sistema costituito di due corpi a contatto, C e C′, i quali si presentano ai nostri sensi come indeformabili, e separati dal piano Π.

Il corpo C′ sia fisso, C mobile. Le forze esterne agenti sopra C si riducano ad una forza F, applicata ad un suo punto P.

Diciamo n la normale a Π, condotta da P e rivolta verso C′, θ l'angolo che F forma con n.

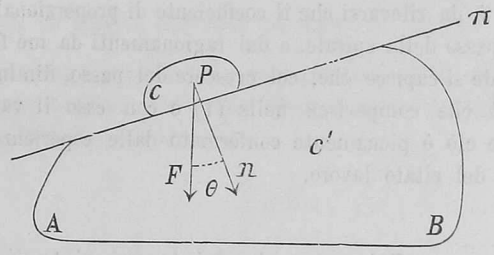
Ammettendo che il Principio de' lavori virtuali sia valido, e denotando con L il lavoro eseguito dalla forza F per uno spostamento di C, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di questo corpo sarà espressa dalla formula

$$L \leqq 0,$$

che dovrà esser verificata per tutti gli spostamenti infinitesimi di C compa-

tibili coi vincoli, ossia colla presenza del corpo C'. È superfluo ricordare che nella formula con cui si esprime il Principio de' lavori virtuali non devono figurare le *resistenze passive* (reazioni dei vincoli) e che il segno $<$ è necessario quando si hanno vincoli *unilaterali*.

In alcuni casi l'esperienza ci dirà che l'equilibrio di C non sussiste se non quando θ abbia sensibilmente il valore *zero*. Supponiamo, invece, di aver constatato che C sta in equilibrio anche se l'angolo θ è diverso da zero, purchè non superi un certo valore Θ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Noi diciamo in tal caso che fra la superficie di C e quella di C' *si esercita attrito*.



Quando ciò accade, non potremo ritenere che C e C' siano *esattamente* separati dal piano Π: poichè, se ciò fosse, noi potremmo dare a C una traslazione formante un angolo ottuso con n, ma un angolo acuto con F; e per un tale spostamento, a cui i vincoli non si opporrebbero, la forza F eseguirebbe un lavoro $L > 0$.

Se dunque il Principio de' lavori virtuali si vuol ritenere valido anche quando fra le superficie di C e C' si esercita attrito, e d'altra parte non vogliamo introdurre arbitrariamente nuove forze esterne, dobbiamo intanto abbandonare l'ipotesi che i due corpi siano esattamente separati dal piano Π. Noi potremo supporre che si abbiano particelle appartenenti a C situate, rispetto al piano Π, dalla parte verso cui è rivolta la normale n, e particelle di C' situate dal lato opposto, le quali, finchè θ non supera Θ, impediscono a C tutti quegli spostamenti infinitesimi per cui la forza F eseguirebbe un lavoro positivo. Denoteremo con k tali particelle.

Le particelle k, potranno essere, per esempio, dei piccoli coni di rivoluzione, aventi gli assi normali al piano Π, le basi su questo piano, e le generatrici inclinate dell'angolo Θ sul piano stesso: ma è evidente che infinite altre forme si potrebbero loro attribuire.

Per ciascuna delle particelle k appartenenti a C o C', dovremo immaginare, in C' o C, una cavità entro la quale la particella si trova: e non sarà necessario che ogni particella riempia del tutto la cavità corrispondente.

Poichè, conservando a Θ il suo valore, possiamo attribuire alle particelle k dimensioni piccole ad arbitrio, non v'è difficoltà ad ammettere che la loro presenza possa sfuggire alla nostra osservazione. Noi d'altronde non vogliamo affermare che tali particelle esistono, ma che *tutto accade come se esse esistessero, e il Principio de' lavori virtuali fosse valido.*

3. In questo primo caso esaminato, si può conservare l'ipotesi che i due corpi a contatto siano assolutamente indeformabili. Ma ciò in generale non è possibile.

Consideriamo ancora un corpo C apparentemente indeformabile, compreso fra *due* corpi fissi C′, C″, limitati dai piani paralleli Π', Π''. Fra la superficie di C, e quelle dei due corpi, coi quali esso è a contatto, si eserciti attrito.

Le forze esterne agenti sopra C si riducono ad una forza F, applicata ad un suo punto P e parallela ai due piani. L'esperienza ci mostrerà che l'equilibrio di C sussiste finchè la grandezza della forza non supera un certo valore F_o.

Analogamente a quanto accadeva nell'altro caso, se si ammette che il Principio d. l. v. sia valido, non potremo ritenere che i corpi C, C′, C″ siano esattamente separati dai piani Π', Π''; poichè se ciò fosse, supposto C in equilibrio sotto l'azione di una forza F diversa da zero, noi potremmo dare ad esso una traslazione infinitesima nella direzione e nel verso della forza, che eseguirebbe così un lavoro positivo.

Supporremo dunque che vi siano particelle di C fuori dello spazio compreso fra i due piani, e particelle di C′ e C″ entro questo spazio, le quali, finchè i tre corpi non subiscono deformazioni, impediscono a C qualsiasi spostamento.

Ma poichè, quando F supera in grandezza il valore F_o, noi constatiamo uno spostamento di C, dovremo ammettere che i corpi del nostro sistema *possono deformarsi.* Per attenerci all'ipotesi più semplice, supporremo che essi presentino, sia pure in grado piccolissimo, le proprietà degli ordinarî solidi elastici. Diciamo, per una deformazione qualunque del sistema, L il lavoro delle forze esterne, L_i il lavoro delle forze interne: la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio sarà espressa dalla formula

$$L + L_i \leqq 0, \tag{1}$$

che dovrà esser verificata per tutte le deformazioni infinitesime che il sistema può subire.

4. Abbiasi ora un sistema di quanti corpi C si voglia, limitati apparentemente dalle superficie Σ. Denoti σ la totale superficie apparente di contatto (nei casi esaminati σ fa parte dei piani Π, Π', Π'').

La presenza delle particelle k che si trovano fuori delle sup. Σ, se trascuriamo le deformazioni elastiche che tali particelle potranno subire, avrà unicamente l'effetto d'introdurre nel sistema un nuovo vincolo, che denoteremo

con V. Fissato il verso della normale n, in ogni punto di σ, e detto μ *il vettore differenza geometrica fra gli spostamenti virtuali di due punti vicinissimi ad un punto* P *di* σ, *e appartenenti l'uno al corpo situato dalla parte di* n, *l'altro all'altro corpo*, il vincolo V consiste in questo, che l'angolo formato da μ con n non può superare il valore $\frac{\pi}{2} - \Theta$.

Introdotto il vincolo V, noi potremo ragionare come se le particelle k non esistessero, e σ fosse la *vera* superficie di contatto fra i corpi del sistema.

5. Posto così il problema, passiamo senz'altro a trasformare, nel caso generale, la formula (1).

Le superficie Σ dei corpi C potranno avere dei punti di contatto con altri corpi (p. es. i punti della superficie AB nel primo caso esaminato). Questi punti, per non complicare inutilmente la questione, li supporremo fissi.

Consideriamo da prima quelle deformazioni per cui lo spostamento è continuo anche nei punti di σ $(\mu = 0)$. Si cadrà nel caso di un ordinario solido elastico, e ritroveremo le note relazioni $\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \cdots + X = 0$, ecc. che legano le tensioni interne alle forze esterne.

Teniamo poi conto di tutte le altre possibili deformazioni del sistema. Per ogni corpo C il lavoro

$$\int_C \left\{ X\delta x + Z\delta y + Z\delta z \right\} dC - \int_C \left\{ t_{11} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + t_{12} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right) + \cdots \right\} dC$$

eseguito dalle forze esterne (forze di massa) e dalle forze interne (forze elastiche), avendo presenti le relazioni già stabilite, potremo trasformarlo in un integrale esteso alla sup. Σ di C. Esso sarà uguale a

$$-\int_\Sigma (p\xi + q\eta + r\zeta) d\Sigma,$$

ove per ogni punto P di σ, ξ, η, ζ rappresentano le componenti, secondo la normale interna e due direzioni ortogonali tangenti a σ, dello spostamento di P, $pd\Sigma$, $qd\Sigma$, $rd\Sigma$ le componenti, secondo le stesse direzioni, della forza che agisce sulla faccia esterna dell'elemento $d\Sigma$.

Nei punti di Σ non a contatto con altri corpi del sistema, non appartenenti cioè a σ, l'elemento dell'integrale è nullo.

Il lavoro totale sarà dato dalla formola

$$L + L_i = -\int_\sigma (p\xi + q\eta + r\zeta) d\sigma,$$

ove ξ, η, ζ rappresenteranno le componenti del vettore μ (spostamento rela-

lativo) se intendiamo che $pd\sigma$, $qd\sigma$, $rd\sigma$ sieno le componenti della forza f che agisce sulla faccia dell'elemento $d\sigma$ opposta ad n.

Poichè ξ, η, ζ sono arbitrarie, salvo a soddisfare la condizione imposta dal vincolo V, dovrà essere, in tutti i punti di σ,

$$p\xi + q\eta + r\zeta \geqq 0,$$

per qualunque direzione di μ formante con n un angolo non maggiore di $\frac{\pi}{2} - \Theta$; quindi se θ è l'angolo che f forma con n, dovrà essere

$$\theta \leqq \Theta.$$

Questa è appunto la condizione d'equilibrio, quale risulta dall'esperienza.

Dunque l'ipotesi che un sistema di corpi a contatto, fra le cui superficie si esercita attrito, sia soggetto al vincolo V, ci permette di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio, applicando rigorosamente il Principio dei lavori virtuali.

Se diciamo λ la grandezza del vettore proiezione di μ sul piano tangente a σ, la condizione imposta dal vincolo V sarà espressa dalla formula $\xi \geqq \lambda \operatorname{tag} \Theta$, ovvero, posto $\operatorname{tag} \Theta = K$,

$$\xi \geqq K\lambda. \quad (\xi = \text{comp. normale di } \mu).$$

6. Nel linguaggio ordinario, quando si studiano le condizioni d'equilibrio di un sistema di corpi, le cui superfice presentano attrito, non si parla di *vincoli*, ma di *forze d'attrito*. Noi vogliamo trasformare la formula (1) in modo da poter esprimere la condizione che essa rappresenta, adoperando i termini ordinariamente usati.

Perciò diciamo ora ξ, η, ζ le componenti del vettore μ in una deformazione infinitesima D che sarebbe possibile *se il vincolo* V *non esistesse*: la condizione $\xi \geqq K\lambda$ potrà non esser verificata. Poniamo

$$\xi' = \xi + \varphi\lambda, \eta' = \eta, \zeta' = \zeta \quad , \quad (\lambda = |\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}|)$$

φ essendo una funzione di ξ, η, ζ, tale che risulti sempre $\xi' \geqq K\lambda$. Quando è $\xi \geqq K\lambda$, supporremo $\varphi = 0$, quando $\xi = 0$, $\varphi = K$.

Una deformazione D' a cui corrisponda il vettore μ' di componenti ξ', η', ζ' sarà compatibile anche col vincolo V. E tutte le deformazioni D' compatibili col vincolo V saranno comprese nelle D.

Nella deformazione D' il lavoro $L' + L'_i$ eseguito dalle forze esterne ed interne è dato dalla formula

$$L' + L'_i = -\int_\sigma (p\xi' + q\eta' + r\zeta')d\sigma,$$

la quale, sostituendo a ξ', η', ζ' le loro espressioni $\xi + \varphi\lambda$, η, ζ, e ponendo

$$L_a = -\int_\sigma \varphi\lambda\, p d\sigma,$$

si potrà scrivere

$$L' + L'_i = L + L_i + L_a,$$

ove L ed L_i rappresentano i lavori che eseguirebbero le forze nella def. D.

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema $(L' + L'_i \overline{<} 0)$ sarà quindi espressa dalla formula

$$L + L_i + L_a \overline{<} 0,$$

la quale dovrà esser verificata *per tutte le deformazioni infinitesime* D *che il sistema potrebbe subire se il vincolo* V *non esistesse.*

Possiamo dunque dire che, per quanto riguarda l'equilibrio, *il fenomeno ci si presenta come se tutte le deformazioni* D *fossero possibili, ma per produrre tali deformazioni si dovessero vincere delle forze il cui lavoro fosse uguale ad* L_a. Secondo la rappresentazione che noi abbiamo dato del fenomeno, questo lavoro si riferisce invece ad una deformazione, la quale, composta con D, ci dà una deformazione D′ compatibile con tutti i vincoli a cui il sistema si suppone assoggettato.

Quando il vettore μ è tangente a σ $(\lambda = \mu)$, l'elemento dell'integrale esteso a σ che dà il valore di L_a, è il prodotto della costante $-K$ per la componente normale $pd\sigma$ della pressione che agisce su $d\sigma$, e per lo spostamento tangenziale λ.

La costante positiva $K = \operatorname{tag}\Theta$ avrà in ogni punto di σ un valore determinato, dipendente dalla natura dei due corpi a contatto e delle loro superficie *reali*. Essa non è altro che il *coefficiente d'attrito* (di primo distacco).

Si noti che il lavoro L_a può esser diverso da zero anche se in nessun punto di σ lo spostamento relativo μ giace sul piano tangente. Ciò apparirà ben naturale quando si pensi che σ non è la *vera* superficie di contatto fra i corpi del sistema.

Per una qualsiasi deformazione D diremo che L_a rappresenta il *lavoro delle forze d'attrito*. Chiameremo poi *vincoli apparenti* tutti i vincoli ai quali il sistema si suppone assoggettato, escluso il vincolo V. Onde avremo il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema di corpi a contatto, fra le cui superfice si esercita attrito, è questa: che per qualunque deformazione infinitesima compatibile coi vincoli apparenti, la somma dei lavori eseguiti dalle forze esterne, dalle forze interne, e dalle forze d'attrito sia nulla o negativa.