ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Matematica. — *Sopra una ricerca di limite.* Nota di ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Corrispondente E. CESÀRO.

Il teorema:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

dal quale, direttamente od indirettamente, hanno preso origine molte ricerche del Cesàro sulla *Aritmetica assintotica* [1], e quelle del Borel sulle *Serie sommabili*; è dimostrato solo nel caso in cui la variabile positiva b_n vada allo zero sempre decrescendo, e la somma $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ cresca oltre ogni limite [2].

Questo è infatti il caso che più naturalmente si presenta nella teoria delle serie a termini positivi; ma il teorema medesimo si presta a molte altre importanti applicazioni, per le quali occorre che le b_n sieno assoggettate a condizioni più larghe.

In particolare, ho dovuto applicarlo allo studio della *frequenza di insiemi lineari*, ed a quello generale della *convergenza di algoritmi infiniti*; in casi in cui le b_n dovevano essere supposte infinite, ed in altri in cui la somma $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, era infinitesima per $n = \infty$.

Ho visto, che pur conservando per la variabile a_n la massima generalità di definizione, il teorema è valido anche in cotesti casi, *quando si ammetta che la variabile monotona*

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

abbia *ordine finito di infinito o di infinitesimo*; ma che non è più valido, senza che per le a_n si introducano speciali ipotesi, per variabili B_n crescenti più rapidamente di qualsiasi potenze positiva n^a, o decrescenti più rapidamente di qualunque potenza negativa n^{-a}

1. Teorema 1°. *Se, crescendo n all'infinito, la variabile b_n si conserva monotona e la somma*

$$(1) \qquad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

(1) Rend. Acc. Sc. fisiche e mat. di Napoli, 1893, pag. 187; Mathesis, 1893, pag. 241, Atti Acc. Sc. di Napoli, 1894, n. 11; Rend. Circ. Mat. di Palermo, tomo I, pp. 224-293.

(2) Vedasi p. es. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 103.

è infinita di ordine finito, si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \tag{2}$$

purchè il secondo membro esista e sia finito (o nullo).

Se la variabile B_n *è infinita del primo ordine (secondo la definizione di Cauchy)* (¹), *il teorema ha luogo anche nella ipotesi che esista solo il primo membro, purchè si sappia che il valore assoluto del secondo membro ha massimo limite finito.* (Questa condizione è in particolare soddisfatta se il valore assoluto $|a_n|$ ha massimo limite finito).

Il teorema è noto per variabili b_n infinitesime; se la variabile monotona b_n non è infinitesima, la somma

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

è infinita del primo ordine almeno.

Se B_n è infinita del primo ordine, dovremo avere (²):

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta B_n}{B_n} : \frac{1}{n} = 1; \tag{3}$$

se ha ordine finito, maggiore di 1, determineremo due numeri positivi ε, μ, con la condizione:

$$\left\{ \begin{aligned} &\min.\lim_{n=\infty} \frac{\Delta B_n}{B_n} : \frac{1}{n} \geqq 1 + \varepsilon, \\ &\max.\lim_{n=\infty} \frac{\Delta B_n}{B_n} : \frac{1}{n} < \mu. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Pongasi:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\lambda_n, \tag{5}$$

$$c_n = n(b_{n+1} - b_n), \tag{6}$$

$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = nb_{n+1} - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = n\Delta B_n - B_n. \tag{7}$$

Avremo le identità:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n &= \lambda_1 b_1 + (2\lambda_2 - \lambda_1) b_2 + \cdots + (n\lambda_n - (n-1)\lambda_{n-1}) b_n \\ &= \lambda_n \{ b_1 + b_2 + \cdots + b_n + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \} - \\ &\quad - (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n); \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lambda_n + \\ + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \left\{ \lambda_n - \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \right\}. \tag{8}$$

(¹) *Oeuvres*, sér. II, t. IV, pag. 281. Vedi ancora: E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*; E. Bortolotti, *Lezioni pel calcolo degli infinitesimi* (Modena 1905).

(²) Cfr. Bortolotti, *Contributo alla teoria degli infiniti*, Ann. di Mat. t. XI della serie III, pag. 50; *Lezioni sul calcolo degli infinitesimi*, pag. 50.

Ora

$$\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{n\varDelta B_n-B_n}{B_n}=\frac{\varDelta B_n}{B_n}:\frac{1}{n}-1; \tag{9}$$

onde, ricordando la (3), si vede che, *se la* B_n *è infinita del primo ordine, si ha*

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=0. \tag{10}$$

Poichè $|\lambda_n|$ ha massimo limite finito, indicando questo con L, avremo:

$$\begin{cases} \max.\lim\limits_{n=\infty}|\lambda_n|\leqq L, \\ \max.\lim\limits_{n=\infty}\left|\dfrac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right|\leqq L; \end{cases}$$

onde ancora:

$$\max.\lim_{n=\infty}\left|\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right|<2L,$$

e, per la (10):

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\left\{\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+\cdots+c_n}\right\}=0. \tag{11}$$

Dalla identità (8) ricaviamo dunque:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim_{n=\infty}\lambda_n; \tag{12}$$

quando uno dei due membri esista.

Sia invece B_n infinita di ordine superiore al 1°.

Considerando che, in questa ipotesi, la b_n non può essere decrescente; vediamo che la

$$c_n=n(b_{n+1}-b_n)$$

è sempre positiva o nulla, *la* C_n *è dunque monotona*; mentre, dalla prima delle (4), ricaviamo

$$C_n\geqq\varepsilon B_n,$$

la quale ci assicura che *la* C_n *è infinita per* $n=\infty$.

Supposto dunque che esista il limite della variabile λ_n, si avrà per un noto teorema:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}=\lim_{n=\infty}\lambda_n,$$

ed in conseguenza, se λ_n è finito o nullo,

$$\lim_{n=\infty}\left\{\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right\}=0.$$

Si ha poi, per le (4), (9),

$$\max.\lim_{n=\infty}\ ,\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\max.\lim_{n=\infty}\left(\frac{\Delta B_n}{B_n}:\frac{1}{n}-1\right)<\mu-1\,.$$

Dunque rimane provato, che

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\left\{\lambda_n-\frac{c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\cdots+c_n\lambda_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right\}=0$$

e, dalla identità (8) ricaviamo

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim_{n=\infty}\lambda_n\,,$$

purchè il secondo membro esista, e sia finito (o nullo).

2. Teorema 2°. *Se la variabile* $R_n=a_0b_0-a_1b_1-\cdots-a_nb_n$, *è infinitesima, la variabile* b_n *è monotona, e la variabile* $\beta=b_0-b_1-b_2-\cdots-b_n$, *è infinitesima, di ordine non superiore a quello di qualunque potenza positiva* $\left(\frac{1}{n}\right)^a$, *di* $\frac{1}{n}$, *si ha*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_0b_0-a_1b_1-\cdots-a_nb_n}{b_0-b_1-b_2-\cdots-b_n}=\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\,,$$

purchè il secondo membro esista, e sia finito (o nullo).

Pongasi

$$\left\{\begin{array}{l}a_0=\lambda_0\ ,\ a_1+a_2+\cdots+a_n=n\lambda_n\\ c_0=b_0\ ,\ c_n=n(b_n-b_{n+1})\\ \gamma_n=c_0-c_1-c_2-\cdots-c_n=\beta_n+nb_{n+1}\,.\end{array}\right.\tag{13}$$

Per la convergenza della serie a termini positivi monotoni Σb_n, supposta dal nostro enunciato, si ha

$$\lim_{n=\infty}nb_{n+1}=0\,;$$

ed anche perciò, dalle (13),

$$\lim_{n=\infty}\gamma_n=0\,.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, converge dunque verso la somma c_0.
Si ha poi la identità

$$\begin{aligned}a_0b_0-a_1b_1-\cdots-a_nb_n&=\\ &=a_0b_0-\lambda_1b_1-(2\lambda_2-\lambda_1)\,b_2-\cdots-(n\lambda_n-(n-1)\,\lambda_{n-1})\,b_n\\ &=\lambda_0c_0-\lambda_1c_1-\lambda_2c_2-\cdots-n\lambda_n\,b_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Da cui

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n = \tag{14}$$
$$= \lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \cdots - \lambda_n c_n + \lambda_n(\beta_n - \gamma_n).$$

Osserviamo anzitutto che

$$\lim_{n=\infty} \lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \cdots - \lambda_n c_n = 0,$$

cioè che *le serie* $\sum_1^\infty \lambda_n c_n$ *converge verso la somma* $c_0 \lambda_0$.

In secondo luogo poi, dividendo per β_n, abbiamo dalla (14):

$$\frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n}{b_0 - b_1 - \cdots - b_n} = \lambda_n + \frac{\gamma_n}{\beta_n}\left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\}. \tag{15}$$

Poichè la variabile

$$\gamma_n = c_0 - c_1 - \cdots - c_n,$$

al crescere indefinito di n, tende allo zero, senza mai crescere; ed anche la variabile

$$\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n,$$

è infinitesima, avremo

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} = \lim_{n=\infty} c_n,$$

purchè esista il secondo membro, ed anche perciò:

$$\lim_{n=\infty} \left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\} = 0.$$

Siccome poi

$$\frac{\gamma_n}{\beta_n} = \frac{\beta_n + n b_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \frac{n b_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \frac{\Delta \beta_n}{\beta_n} : \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}};$$

ed è noto che, se la variabile β_n ha ordine finito di infinitesimo, si può determinare un numero L tale che

$$\max.\lim_{n=\infty} \frac{\Delta \beta_n}{\beta_n} : \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < \mathrm{L};$$

così rimane provato, che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma_n}{\beta_n} \left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\} = 0;$$

ed infine, per la (15),

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n}{b_0 - b_1 - \cdots - b_n} = \lim_{n=\infty} \lambda_n .$$

3. I risultamenti ottenuti si possono riassumere nell'enunciato seguente:

T e o r e m a 3°. *Date due serie:*

$$\sum_1^\infty u_n \quad , \quad \sum_1^\infty b_n ,$$

delle quali la seconda è a termini positivi, monotoni; se al tendere di n all'infinito, esiste limite determinato e finito per la media:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \cdots + \frac{u_n}{b_n}\right),$$

dei rapporti dei primi n termini corrispondenti; allo stesso limite tende il rapporto

$$\frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{B}_n} = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

delle loro somme, quando la Σb_n sia divergente; od il rapporto

$$\frac{\mathrm{R}_n}{\beta_n} = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots}$$

dei loro resti, se entrambe convergano; purchè la variabile B_n non diverga nel primo caso più rapidamente di qualunque potenza positiva n^a della n, o la B_n non sia, nel secondo caso, infinitesima di ordine superiore a quello di qualunque potenza negativa $\frac{1}{n^a}$, della n.

4. Le condizioni che in questo enunciato si sono imposte, circa la rapidità di crescenza della B_n, o la rapidità di evanescenza della β_n, sono essenziali.

Senza entrare qui in particolari minuti, che troveranno posto in una Memoria di prossima pubblicazione negli Atti dell'Accademia di Scienze lettere ed arti in Modena; mi basti osservare, che fatto

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{u_1}{b_1} = 0 , \frac{u_2}{b_2} = 0 , \ldots , \frac{u_r}{b_r} = 0 , \frac{u_{r+1}}{b_{r+1}} = 1 , \frac{u_{r+2}}{b_{r+2}} = 1 , \ldots , \frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}}} = 1 , \\
\frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}+1}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}+1}} = 0 , \frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}+2}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}+2}} = , \ldots , \\
\qquad \frac{u_{r^2}}{b_{r^2}} = 0 , \frac{u_{r^2+1}}{b_{r^2+1}} = 1 , \frac{u_{r^2+2}}{b_{r^2+2}} = 1 , \ldots , \frac{u_{r^2+\frac{r^2}{(\lg r)^2}}}{b_{r^2+\frac{r^2}{(\lg r)^2}}} = 1 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r > 2 ,
\end{array}\right.$$

dove si è scritto brevemente

$$\frac{r}{\lg r}, \frac{r^2}{(\mathrm{G}\, r)^2} \cdots$$

invece dei massimi interi contenuti in quelle espressioni; si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \cdots + \frac{u_n}{b_u} \right\} = 0 .$$

Se poi si prende $b_n = e^{n^{\frac{1}{\mu}}}$, μ positivo arbitrario, si trova che il rapporto

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

non cessa di oscillare fra i limiti 0, 1.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Riprendo in questa Nota e nella successiva lo studio delle relazioni fra il comportamento delle funzioni derivate e quello delle loro funzioni primitive, di cui già trattai in altra Nota (¹) portante lo stesso titolo. E con nuove argomentazioni mostrerò come i risultati già ottenuti per le funzioni a funzioni derivate limitate si estendano ancora a casi molto più generali.

1. *Se una funzione continua $\psi(x)$ ha in un intervallo $a \dots b$ un incremento di valor assoluto* K *e se si sa che, tolto dall'intervallo $a \dots b$ un aggregato* A *di punti cui corrisponde un aggregato di valori di $\psi(x)$ di misura* $\mathrm{H} < \mathrm{K}$ (²), *in tutti i punti residui, fatta eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, la derivata superiore a destra della $\psi(x)$ è nulla, esistono in $a \dots b$ infiniti punti non appartenenti ad* A *ed in cui almeno una derivata di $\psi(x)$ è infinita* (La proposizione rimane evidentemente vera se in luogo della derivata superiore a destra si considera uno qualunque degli altri tre numeri derivati (³)).

(¹) Vedi pag. 433.

(²) La dimostrazione si semplifica notevolmente nell'ipotesi della non esistenza dell'aggregato A; il lettore potrà ottenere tal semplificazione considerando come nulli i segmenti e aggregati di segmenti $\mathcal{S}$, S, s_i, σ_i, e nulli pure i numeri H, χ e come non esistenti quindi le considerazioni che a questi elementi si riferiscono.

(³) Il ragionamento si ripete per questi altri numeri derivati, per semplice analogia. D'altronde una osservazione già fatta nella Nota precedente (n. 3) permette di dedurre le proposizioni analoghe direttamente da quella del testo, senza riprendere il ragionamento. Nel seguito le proposizioni analoghe a quelle enunciate, per le singole funzioni derivate, saranno costantemente sottintese.