ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

dove si è scritto brevemente

$$\frac{r}{\lg r}, \frac{r^2}{(\mathrm{G}\, r)^2} \cdots$$

invece dei massimi interi contenuti in quelle espressioni; si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{u_1}{b_1}+\frac{u_2}{b_2}+\cdots+\frac{u_n}{b_u}\right\}=0 .$$

Se poi si prende $b_n = e^{n^{\frac{1}{\mu}}}$, μ positivo arbitrario, si trova che il rapporto

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

non cessa di oscillare fra i limiti $0, 1$.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Riprendo in questa Nota e nella successiva lo studio delle relazioni fra il comportamento delle funzioni derivate e quello delle loro funzioni primitive, di cui già trattai in altra Nota ([1]) portante lo stesso titolo. E con nuove argomentazioni mostrerò come i risultati già ottenuti per le funzioni a funzioni derivate limitate si estendano ancora a casi molto più generali.

1. *Se una funzione continua* $\psi(x)$ *ha in un intervallo* $a \ldots b$ *un incremento di valor assoluto* K *e se si sa che, tolto dall'intervallo* $a \ldots b$ *un aggregato* A *di punti cui corrisponde un aggregato di valori di* $\psi(x)$ *di misura* $\mathrm{H} < \mathrm{K}$ ([2]), *in tutti i punti residui, fatta eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, la derivata superiore a destra della* $\psi(x)$ *è nulla, esistono in* $a \ldots b$ *infiniti punti non appartenenti ad* A *ed in cui almeno una derivata di* $\psi(x)$ *è infinita* (La proposizione rimane evidentemente vera se in luogo della derivata superiore a destra si considera uno qualunque degli altri tre numeri derivati ([3])).

([1]) Vedi pag. 433.

([2]) La dimostrazione si semplifica notevolmente nell'ipotesi della non esistenza dell'aggregato A; il lettore potrà ottenere tal semplificazione considerando come nulli i segmenti e aggregati di segmenti $\mathcal{S}, \mathrm{S}, s_i, \sigma_i$, e nulli pure i numeri H, χ e come non esistenti quindi le considerazioni che a questi elementi si riferiscono.

([3]) Il ragionamento si ripete per questi altri numeri derivati, per semplice analogia. D'altronde una osservazione già fatta nella Nota precedente (n. 3) permette di dedurre le proposizioni analoghe direttamente da quella del testo, senza riprendere il ragionamento. Nel seguito le proposizioni analoghe a quelle enunciate, per le singole funzioni derivate, saranno costantemente sottintese.

Si chiami B l'aggregato dei punti di $a \dots b$, non appartenenti ad A, ed in cui si sa che la derivata superiore a destra di $\psi(x)$ è nulla; C l'aggregato di misura nulla di punti non appartenenti ad A in cui non si conosce la derivata di $\psi(x)$, $\mathfrak{A}$ l'aggregato dei valori di $\psi(x)$ corrispondenti ai punti di A.

Assegnato arbitrariamente un $\chi > 0$, si può determinare un aggregato $\mathcal{S}$ di segmenti di misura totale compresa fra H e $\mathrm{H} + \chi$, contenente nel suo interno $\mathfrak{A}$. Se x_0 è un punto di A, il valore corrispondente $\psi(x_0)$ di $\psi(x)$ sarà interno a qualche segmento di $\mathcal{S}$ e, per la continuità di ψ, si potrà determinare un intervallo contenente x_0 nel suo interno e tale che ai punti di esso corrispondano solo valori di $\psi(x)$ interni a quel segmento di $\mathcal{S}$. Per tal modo si verrà a rinchiudere A dentro un aggregato S di segmenti ai cui punti corrispondono solo valori di $\psi(x)$ interni ad $\mathcal{S}$; e riunendo convenientemente in un unico più segmenti di tale aggregato quando si sovrappongano parzialmente, o totalmente, od abbiano un estremo comune, si potrà supporre che questo aggregato consti di una infinità numerabile di segmenti non aventi punti comuni. Gli estremi dei segmenti di S appartengono a B e a C.

Si supponga scomposto l'intervallo $a \dots b$ in una somma qualsiasi di segmenti $\mathcal{A}$: la somma degli incrementi di ψ nei segmenti di questo aggregato è in valore assoluto $= \mathrm{K}$: ma l'aggregato dei valori di ψ corrispondenti a punti di S ha misura $< \mathrm{H} + \chi$ e tal misura è d'altronde maggiore o uguale al valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di S od in qualsiasi aggregato di segmenti contenuto in S: dunque anche il valore assoluto di questa somma è $< \mathrm{H} + \chi$. Se quindi si sopprime in $\mathcal{A}$ un aggregato di segmenti σ, contenuti in S, e tali che $\mathcal{A} - \sigma$ sia ancora un aggregato di segmenti, il valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di $\mathcal{A} - \sigma$ è, qualunque sia σ, $> \mathrm{K} - \mathrm{H} - \chi$.

In S potrà esser contenuta una parte di C; il ragionamento che segue mostrerà che questa parte non può estendersi a tutto C: in ogni modo si chiami C′ la parte di C esterna ad S, ammettendo, al bisogno ch'essa possa esser nulla.

Si supponga ora fissata una numerazione dei segmenti di S, ed i segmenti così numerati si chiamino $s_1, s_2, \dots$

Si rinchiuda allora C′ in un aggregato T_{η_1} di segmenti non aventi fra loro punti comuni e aventi comuni con s_1 al più estremi, e di misura totale $< \eta_1$, ove η_1 è un numero che si può assegnare arbitrariamente e di cui ci riserviamo di disporre. Vogliamo dimostrare che *in* T_{η_1} *è contenuto qualche segmento tale che, detta* ζ_1 *la sua lunghezza, il valore assoluto della somma degli incrementi di* $\psi(x)$ *nei segmenti che si ottengono sopprimendo in esso un aggregato qualsiasi* (che può essere nullo) *di segmenti contenuti in* S, *sia sempre* $> (\mathrm{K} - \mathrm{H} - \chi - \varepsilon) \dfrac{\zeta_1}{\eta_1}$.

Consideriamo perciò l'aggregato $S + T_{\eta_1}$: qualora avvenisse ch'esso ricopra tutto l'intervallo $a \dots b$, lo si pensi ridotto ad un aggregato semplice di segmenti senza parti comuni e di cui sia parte l'aggregato T_{η_1}; si potrà considerare questo come l'aggregato $\varDelta$ delle linee precedenti. Se in questo aggregato si pensano quindi soppressi i segmenti (contenuti in S) esterni ai segmenti di T_{η_1} ed un aggregato arbitrario σ_1 di altri segmenti contenuti in S, il valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di $T_{\eta_1} - \sigma_1$ è, qualunque sia σ_1 (eventualmente anche nullo), $> K - H - \chi$ (> 0 perchè $H < K$ e quindi, per χ sufficientemente piccolo, $H + \chi < K$). Per unità di linguaggio con quanto segue, potremo, a maggior ragione, asserire che il valore assoluto di tal somma è $> K - H - \chi - \varepsilon$ e si potranno chiamare, nella presente ipotesi, t i segmenti di T_{η_1} e T'_{η_1} l'aggregato T_{η_1} medesimo.

Se invece $S + T_{\eta_1}$ non ricopre tutto l'intervallo $a \dots b$, si consideri l'aggregato U dei segmenti senza punti comuni che contiene tutti e soli i punti di $S + T_{\eta_1}$, e si pensino numerati in un modo qualsiasi questi segmenti, e quindi i loro estremi destri. Ciascuno di questi estremi appartiene a B.

Assegnato arbitrariamente un ε, ad ogni punto x di B si può far corrispondere un intervallo $x \dots x + h (h > 0)$ massimo tale che $|\psi(x+h) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} h$: il punto $x + h$ non apparterrà a B perchè, qualora vi appartenesse gli corrisponderebbe un $h_1 > 0$ tale che $|\psi(x + h + h_1) - \psi(x+h)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} h_1$ e sarebbe $|\psi(x+h+h_1) - \psi(x)| \leq |\psi(x+h+h_1) - \psi(x+h)| + |\psi(x+h) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(h+h_1)$: l'intervallo $x \dots x + h + h_1$ dovrebbe quindi sostituirsi a $x \dots x + h$. È quanto dire che ciascun punto $x + h$ è *interno* a un segmento di U.

Ciò posto sia x_1 il primo estremo destro di segmenti di U nella numerazione dianzi supposta, h_1 il corrispondente valore di h, secondo la precedente definizione: si chiami l_1 il segmento $x_1 \dots x_1 + h_1$; se inoltre l'estremo $x_1 + h_1$ è interno ad un segmento $\alpha_1 \dots \beta_1$ di T_{η_1} ($\alpha_1 < x_1 + h_1 < \beta_1$) si chiami t_1 il segmento $x_1 + h_1 \dots \beta_1$. Sia poi x_2 il primo estremo destro di segmenti di U che nella supposta numerazione segue x_1 e che è esterno a $x_1 \dots x_1 + h_1$ (quindi anche esterno o estremo a $x_1 \dots \beta_1$); sia h_2 il massimo valore di h per cui $|\psi(x_2 + h) - \psi(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} h$ e il segmento $x_2 \dots x_2 + h_2$ non ha punti comuni con $x_1 \dots x_1 + h_1$ (è certo $h_2 > 0$). Si chiami l_2 il segmento $x_2 \dots x_2 + h_2$ e, se $x_2 + h_2$ è interno all'intervallo $\alpha_2 \dots \beta_2$ di T_{η_1}, si chiami t_2 il segmento $x_2 + h_2 \dots \beta_2$. Analoga operazione si ripeta per l'estremo destro di segmenti di U, primo, nella supposta numerazione, fra quelli esterni a $x_1 \dots x_1 + h_1$, $x_2 \dots x_2 + h_2$, chiedendo che il corrispondente segmento $x_3 \dots x_3 + h_3 \equiv l_3$ non abbia punti comuni coi segmenti precedenti e così via. Si chiami L l'aggregato dei segmenti l; si chiamino poi segmenti t, oltre quelli or ora definiti, ancora tutti i segmenti di T_{η_1} completamente esterni ai segmenti l e si chiami T'_{η_1} l'aggregato dei segmenti t. L'aggregato $S + L + T'_{\eta_1}$ ricopre interamente $a \dots b$; si può quindi ripetere per esso l'osservazione fatta poco fa, nell'ipotesi che $S + T_{\eta_1}$ ricoprisse $a \dots b$ e considerarlo cioè come l'aggregato A del principio: si conclude che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti l e in quelli dell'aggregato $L + T'_{\eta_1} - \sigma_1$ ottenuto sopprimendo in $L + T'_{\eta_1}$ un aggregato qualunque σ_1 di segmenti contenuti in S è $> K - H - \chi$. Questo valore assoluto non può che accrescersi se a qualcuno degli incrementi addendi si sostituisce il suo valore assoluto; ora la somma dei valori assoluti degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti l è

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i l_i < \varepsilon$$

poichè $\sum l_i < b - a$; quindi il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti di $T'_{\eta_1} - \sigma_1$ — e a più forte ragione la somma dei valori assoluti delle somme formate ciascuna con quelli di tali incrementi che appartengono a segmenti di uno stesso t — è $> K - H - \chi - \varepsilon$ (¹). Sia η' la misura totale di $T'_{\eta_1} (\eta' \leq \eta_1)$; fra i segmenti t dovrà esservene qualcuno tale che, detta ζ_1 la lunghezza dell'intervallo, il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti contenuti in esso ed esterni a σ_1 è, qualunque sia σ_1 (²),

$$> \{ K - H - \chi - \varepsilon \} \frac{\zeta_1}{\eta'} \geq \{ K - H - \chi - \varepsilon \} \frac{\zeta_1}{\eta_1} .$$

Si chiami τ_1 un segmento per cui questo fatto si verifichi.

Si può ripetere sopra τ_1 il ragionamento ora fatto per il segmento $a \dots b$, con poche modificazioni; si costruirà cioè un aggregato di segmenti T_{η_2} di misura totale $\eta_2 < \zeta_1$, contenenti nel loro interno la parte di C' contenuta in τ_1 e non aventi fra loro punti comuni, ed aventi al più estremi comuni con s_2, e, scegliendo il numero $\varepsilon\zeta_1$ a far l'ufficio di ε, si concluderà esistere

(¹) Se cioè, per ciascun segmento t esistesse un σ_1 contenuto in esso per cui questa disuguaglianza non fosse soddisfatta quando si considerano gli incrementi nei soli segmenti di $t - \sigma_1$, si osservi che i segmenti t sono esterni tutti l'uno all'altro, e si consideri quindi l'aggregato di segmenti ottenuto sopprimendo da T'_{η_1} la somma di questi aggregati σ_1 contenuti nei singoli t; in questo aggregato non potrebbe la somma di incrementi di cui sopra essere in valore assoluto $> K - H - \chi - \varepsilon$.

(²) Per la continuità $\psi(x)$ la misura di T'_{η_1} e quindi quella di T_{η_1} non potrebbe dunque esser nulla: non potrebbe cioè mancare l'aggregato C'.

in τ_1 un segmento τ_2 di lunghezza ζ_2 tale che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti ottenuti sopprimendovi un (qualunque) aggregato σ_2 di segmenti contenuti in S è

$$>\{K-H-\chi-(1+\eta_1)\,\varepsilon\{\frac{\zeta_1\,\zeta_2}{\eta_1\,\eta_2}.$$

E del pari in τ_2 si riuscirà a determinare un segmento τ_3 di lunghezza ζ_3 non avente punti comuni con s_3 e tale che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti ottenuti sopprimendovi un qualunque aggregato σ_3 di segmenti contenuti in S è

$$>\{K-H-\chi-(1+\eta_.+\eta_1\,\eta_2)\,\varepsilon\{\frac{\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3}{\eta_1\,\eta_2\,\eta_3}.$$

e così via.

I numeri η_i restano arbitrari: si prenda

$$\eta_1=\eta<1-\frac{\varepsilon}{K-H-\chi}\quad,\quad \eta_{i+1}=\zeta_i\,\eta$$

Il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ in ogni aggregato di segmenti ottenuto sopprimendo in τ_i un aggregato di segmenti contenuti in S risulterà

$$(\alpha)\qquad >\left\{\frac{K-H-\chi}{\eta^i}-\left(\frac{1}{\eta^i}+\frac{1}{\eta^{i-1}}+\frac{\zeta_1}{\eta^{i-2}}+\cdots\frac{\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_{i-1}}{\eta}\right)\varepsilon\right\}\zeta_i$$

e quindi, poichè

$$\zeta_i<\eta_i<\eta<1,$$

$$>\left\{\frac{K-H-\chi}{\eta^i}-\left(\frac{1}{\eta^i}+\frac{1}{\eta^{i-1}}+\frac{1}{\eta^{i-2}}+\cdots+\frac{1}{\eta}\right)\varepsilon\right\}\zeta_i$$

$$>\left\{\frac{K-H-\chi}{\eta^i}-\frac{\varepsilon}{\eta^i(1-\eta)}\right\}\zeta_i=\{(K-H-\chi)(1-\eta)-\varepsilon\}\frac{\zeta_i}{\eta^i(1-\eta)}.$$

Si osservi ora che, per la scelta fatta di η, $\varepsilon<(K-H-\chi)(1-\eta)$ e si ponga $(K-H-\chi)(1-\eta)-\varepsilon=M\ (>0)$: l'espressione (α) risulta così $>\dfrac{M}{\eta^i(1-\eta)}\zeta_i$.

Si supponga ora ciascuno degli aggregati σ_i nullo; risulterà, in particolare, che il valore assoluto dell'incremento di $\psi(x)$ in ciascun segmento τ_i è $>\dfrac{M}{\eta^i(1-\eta)}\zeta_i$, ed il rapporto incrementale è quindi $>\dfrac{M}{\eta^i(1-\eta)}$ [1].

[1] Il risultato finale trova quindi solo applicazione nell'ipotesi che gli aggregati σ_i siano nulli: cionondimeno tale ipotesi non poteva farsi fin da principio, perchè è invece essenziale nel passaggio da un segmento τ_i al successivo che si possa valutare l'incremento totale di $\psi(x)$ in un aggregato di segmenti ottenuti sopprimendo in τ_i un aggregato contenuto in S.

Col crescere indefinito di i i segmenti τ_i, tutti interni l'uno all'altro e di lunghezze ζ_i tendenti a 0 ($\zeta_i < \eta_i < \eta^i$) tendono ad un punto limite P, interno a tutti e il detto rapporto incrementale tende a ∞: nel punto P è dunque infinita almeno una derivata di $\psi(x)$. Ed il punto P non apparterrà ad A, perchè ciascun segmento τ_i non contiene punti di $s_1, s_2, \dots, s_i$ e quindi nessun punto di A appartiene a tutti i segmenti τ_i.

Evidentemente non il solo punto P ottenuto con una determinata scelta dei segmenti τ_i sarà in tali condizioni, perchè in $a \dots b$ si potranno determinare segmenti parziali, non contenenti P e soddisfacenti alle ipotesi della nostra proposizione, contenenti quindi essi stessi nuovi punti come P. Ma si può aggiungere di più: *all'aggregato dei punti come* P *in cui una derivata di* $\psi(x)$ *è infinita deve corrispondere un aggregato di valori di* $\psi(x)$ *di misura* $\geq K - H$; infatti quando un aggregato di tali punti fosse noto, e l'aggregato dei valori corrispondenti di $\psi(x)$ avesse misura $< K - H$, si potrebbe aggiungere tale aggregato di punti P all'aggregato A e si otterrebbe ancora un aggregato di punti cui corrisponderebbe un aggregato di valori di $\psi(x)$ di misura $< K$, onde si dovrebbe concludere che, oltre ai punti noti, altri punti in $a \dots b$ dovrebbero avere almeno una derivata infinita.

In particolare questa osservazione ci mostra che *i punti dell'intervallo* $a \dots b$ *in cui almeno una derivata è infinita costituiscono un aggregato non numerabile* (che anzi ha la potenza del continuo od almeno è incapace di essere ben ordinato). Infatti l'aggregato dei valori corrispondenti di $\psi(x)$ ha la potenza del continuo: quindi, facendo corrispondere ad ognuno di questi valori l'aggregato dei punti P in cui tal valore è assunto da $\psi(x)$, l'aggregato dei punti P viene a spezzarsi in un insieme di aggregati parziali staccati della potenza del continuo [1] [2].

[1] Cfr. la mia Nota *Intorno alla teoria degli aggregati*, Rendiconti del R. Ist. Lombardo (2), 35, 1902.

[2] La proposizione dimostrata in questo numero merita di essere confrontata con una varietà di proposizioni analoghe note, e che, nella forma esteriore della loro espressione più usuale *potrebbero parere* identiche ad essa, se non talora più espressive.

È noto anzitutto che una funzione continua che non sia costante in un intervallo $a \dots b$ ha ciascuna delle sue derivate non nulla in un aggregato di punti che ha la potenza del continuo (V. Dini, Luroth-Schepp, *Grundlagen für eine Th. d. Functionen* u. s. w. pp. 96-98. Scheeffer, Acta Math. 5, pag. 283. Schoenflies, *Bericht ü. Mengenlehre*, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 8, 1900, pp. 214-215 (in quest'ultimo luogo l'enunciato contiene condizioni eccessive)). Se poi tale aggregato ha misura nulla *nel senso di Jordan* è noto pure che esiste ancora in esso un aggregato parziale della potenza del continuo in cui almeno una derivata diviene infinita (Schoenflies, l. c. 171-172): questo enunciato è evidentemente un caso particolare di quello del testo, ma la notevole restrizione che in esso va rilevata sta nel trattarsi di aggregati di misura nulla nel senso di Jordan, mentre noi attribuiamo alle stesse parole il significato ben più largo di Borel-Lebesgue (i nostri aggregati di misura nulla possono p. es. essere densi nell'intervallo totale). A questo riguardo si avvicinerà meglio alla nostra la proposizione dello Scheeffer (l. c., pag. 189)

2. Qualche osservazione complementare merita di essere aggiunta alla precedente proposizione. In essa invero da ipotesi relative al comportamento della derivata superiore a destra (ed analoghe proposizioni si avrebbero per le altre funzioni derivate) si conclude solo per l'esistenza di valori infiniti di una indeterminata delle quattro derivate. Una maggior precisione si può evidentemente portare tenendo conto del segno dell'incremento $\psi(b) - \psi(a)$: *sarà, nei punti* P *del numero precedente* $= + \infty$ *una almeno delle derivate superiori* (*a destra o a sinistra*) *se questo incremento è positivo, sarà* $= - \infty$ *una almeno delle derivate inferiori se questo incremento è negativo.*

Si ricordi ancora che in ogni intervallo le quattro derivate hanno lo stesso limite superiore e lo stesso limite inferiore: ciascun punto P sarà quindi punto limite d'un aggregato di punti in cui una qualunque delle quattro derivate prende valori — positivi o negativi a seconda dei due casi — in valore assoluto grandi a piacere. Questa osservazione ci permette di enunciare la precedente proposizione nella forma: *l'aggregato che si ottiene per chiusura di* C *contiene un aggregato di punti in ogni intorno di ciascuno dei quali una derivata determinata* (p. es. la medesima derivata superiore a destra) *diviene grande a piacere positivamente o negativamente.* Un risultato più esplicito si ottiene quando si supponga $H = 0$: si potrà dire allora che *se la funzione* $\psi(x)$ *ha derivata superiore a destra nulla in ogni punto di* $a \ldots b$, *tolti i punti di un aggregato* C *di misura nulla ed ha in* $a \ldots b$ *incremento finito, ogni punto dell'aggregato* C *è punto limite di una serie di punti dell'aggregato medesimo in cui la detta derivata superiore a destra assume valori assoluti grandi a piacere*: perchè un punto di C che non fosse in queste condizioni sarebbe interno ad un intervallo in cui nessuna derivata di $\psi(x)$ sarebbe infinita, e quindi $\psi(x)$ sarebbe costante e ogni sua derivata nulla. E *l'aggregato dei valori di* $\psi(x)$

---

che qui, per comodità del confronto, riproduciamo in un caso particolare: « Una funzione « che non sia una costante non può avere la sua derivata superiore a destra (o un'altra « funzione derivata) nulla in tutto l'intervallo $a \ldots b$, ad eccezione di un aggregato di « punti i cui punti limiti sono tali che: 1° l'aggregato di quelli nell'intorno di ciascuno « dei quali tal derivata è limitata, ma in valore assoluto $> \varepsilon$ ha misura nulla nel senso « di Jordan, qualunque sia ε; 2° nell'aggregato dei punti nell'intorno di ciascuno dei « quali essa derivata può assumere valori assoluti grandi a piacere, la funzione assume « un aggregato di valori di misura nulla (nel senso di Jordan) ». Ora è ben vero che l'aggregato eccezionale dello Scheeffer — pur avendo misura nulla nel senso di Borel-Lebesgue — non ha però misura nulla nel senso di Jordan, avvicinandosi con ciò agli aggregati nostri, senza però rappresentarne il tipo più generale, ma la parte di questo aggregato in cui la funzione derivata considerata non è limitata si suppone abbia per corrispondente un aggregato di valori della funzione primitiva di misura nulla *nel senso di Jordan*.

nei punti in cui almeno una derivata è infinita ha allora misura eguale alla variazione totale di $\psi(x)$.

3. Corollario immediato delle precedenti proposizioni è che: *Date due funzioni* $F(x)$, $\Phi(x)$, *una delle quali* Φ *abbia derivata unica a destra in tutti i punti di un intervallo* $a \dots b$, *tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla, l'altra* F *abbia negli stessi punti la derivata superiore a destra uguale alla nominata derivata di* Φ; *se inoltre le due funzioni hanno tutte le derivate finite in tutti punti dell'intervallo tolti al più quelli di un aggregato cui corrisponde un aggregato di valori di* $F - \Phi$ *di misura nulla; si potrà affermare che* F *e* Φ *non possono differire fra loro che per una costante.*

Indichino infatti i segni D^+ D_+ le derivate a destra, superiore ed inferiore; si ha

$$D^+F(x) - D_+\Phi(x) \geq D^+(F(x) - \Phi(x)) \geq D^+F(x) - D^+\Phi(x).$$

Dalle fatte ipotesi risulta quindi che $F(x) - \Phi(x)$ ha derivata superiore a destra nulla in tutti i punti di $a \dots b$ tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla; d'altra parte le disuguaglianze analoghe che legano le altre derivate di $F(x) - \Phi(x)$ a quelle di $F(x)$ e di $\Phi(x)$ e l'ipotesi fatta nell'enunciato, relativamente all'aggregato di punti in cui qualcuna delle derivate di $F(x)$ o di $\Phi(x)$ può non essere finita, ci dicono che tutte le derivate di $F(x) - \Phi(x)$ sono finite in ogni punto di $a \dots b$, tolti al più i punti di un aggregato cui corrisponde un aggregato di misura nulla di valori di $F - \Phi$. La funzione $F(x) - \Phi(x)$ non potrebbe quindi subire un incremento qualsiasi in alcun intervallo contenuto in $a \dots b$, senza contraddire alla proposizione del n. 1.

Mineralogia. — *Appunti sulla scheelite di Traversella.* Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio G. STRÜVER.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Da circa due anni mi stavo occupando dello studio della scheelite di Traversella, ma la Nota testè pubblicata dal dott. Colomba [1] sullo stesso argomento mi costringe a render noti brevemente soltanto quei risultati da me ottenuti che possono, in certo modo, completare il lavoro del Colomba. E ciò tanto più che il materiale che io ho avuto a mia disposizione era meno interessante di quello che il Colomba ha illustrato.

Le forme da me osservate sono le seguenti: c }001{, a }100{, q_1 }120{, p }111{, β }113{, v }112{, f }114{, e }101{, o }102{, d }105{, s_1 }131{,

[1] *Sulla scheelite di Traversella.* Rendiconti R. Acc. Lincei, 1° sem. 1906, XV, 281.