ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Socio S. Pincherle.

Nel marzo del 1899 presentavo alla R. Accademia una Nota recante lo stesso titolo di questa, in cui dimostravo per altra via e generalizzavo il seguente teorema dato dall' Hurwitz [1]: « se due funzioni analitiche, uniformi regolari per il punto $x=\infty$, sono rappresentate in un intorno di « quel punto rispettivamente da

$$\alpha(x)=\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}\,,\quad \varphi(x)=\sum \frac{k_n}{x^{n+1}}\,, \tag{1}$$

« la serie

$$\psi(x)=\sum\left(a_n k_0+na_{n-1}k_1+\binom{n}{2}a_{n-2}k_2+\cdots+a_0k_n\right)\frac{1}{x^{n+1}} \tag{2}$$

« rappresenta una funzione i cui punti singolari sono i punti p_i+q_j, p_i es- « sendo i punti singolari di $\alpha(x)$ e q_j quelli di $\beta(x)$ ». La dimostrazione era data dall' A. per il caso che p_i, q_j fossero poli di prim'ordine; quella da me data si applicava a punti singolari isolati qualunque, ammessa l' uniformità delle funzioni. Ora, nella presente Nota, mi propongo di mostrare:

1° come la proposizione possa valere per il caso di singolarità qualunque, costituite da punti, linee od aree;

(1) Comptes rendus de l'Académie des sciences, 6 février 1899.

2° come una seconda espressione, analoga a (2) per le sue proprietà, ma ben diversa di forma, valga a definire una funzione formata con due funzioni date e le cui singolarità sono legate nello stesso modo con quelle delle date;

3° come, dalle singolarità di una funzione definita da uno sviluppo

$$\sum c_n x_n$$

sia possibile, in molti casi, di dedurre immediatamente il luogo delle singolarità della funzione definita da

$$\sum c_n p_n(x) \tag{3}$$

essendo $p_n(x)$ un sistema determinato di funzioni analitiche.

1. Abbiansi due funzioni analitiche $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ aventi singolarità qualsiansi: punti, linee od aree. Se le funzioni sono polidrome, siano fatti fra i luoghi di singolarità tali tagli da introdurre la monodromia: in tale caso, comprenderemo codesti tagli fra i luoghi di singolarità. Sia U l'insieme delle singolarità di $\varphi(t)$, V l'insieme di quelle di $\alpha(t)$; u indichi un punto generico di U, v un punto generico di V. Togliendo dal piano-sfera su cui si rappresenta la variabile t l'insieme di punti indicato con U, rimanga un'area U′; togliendo V, rimanga un'area V′; supporremo U′ e V′ connesse, e contenenti entrambe il punto $t=\infty$. Veniamo dunque a considerare due rami ad un valore $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ di funzioni analitiche, regolari in U′ e V′ rispettivamente, compreso il punto $t=\infty$.

2. Tracciamo nel piano t una linea l chiusa, finita e semplice, che includa tutto l'insieme U: i punti di l appartengano tutti ad U′. Questa linea si può deformare con continuità fra i seguenti estremi: da una parte, un cerchio (R) di centro arbitrario, p. es. $t=0$, e di raggio R grande a piacere; dall'altra, l'insieme delle linee (l_i) chiuse, semplici, circondanti le varie parti staccate U_i di U, e prossime al contorno di U_i tanto quanto si vuole; così, se U_i consta di un punto isolato, (l_i) sarà un cerchio avente per centro questo punto e raggio arbitrariamente piccolo. Indichiamo con U_l l'area inclusa dalla l, contorno compreso; con U'_l ciò che rimane dal piano t dopo tolta U_l; analogamente $U_{(l_i)}$ è l'insieme delle aree incluse dalle (l_i), contorni compresi, ed $U'_{(l_i)}$ ciò che rimane dopo tolto $U_{(l_i)}$ al piano t. Ad ogni punto u di U_l facciamo corrispondere il punto $u-v$, v essendo un punto generico di V; quando u descrive U_l, $u-v$ descrive un'area congruente: variando v in V, si ha un complesso di aree che indicheremo complessivamente con $(U-V)_l$. Sia infine W_l ciò che rimane dal piano t quando vi si tolga l'area $(U-V)_l$; analoga definizione per $W_{(l_i)}$.

Sia x un punto di W_l; allora il punto $x+v$ ci darà, per ogni v, un punto di U'_l; se infatti così non fosse, $x+v$ appartenendo ad U_l, x apparterrebbe ad $(U-V)_l$.

Se l va restringendosi e tendendo alle (l_i), W_l in corrispondenza andrà dilatandosi; cioè se x appartiene a W_l, esso appartiene ad ogni $W_{l'}$ dove l' è compresa fra l e le l_i, ed *a fortiori* appartiene a $W_{(l_i)}$.

3. Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$(4) \qquad \lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t-x)\, dt,$$

x essendo un punto arbitrariamente preso in una delle parti connesse che costituiscono W_l. Per tali determinazioni di x, la linea l non conterrà singolarità nè di $\varphi(t)$, nè di $\alpha(t-x)$ fra i suoi punti; l'espressione (4) rappresenta pertanto un ramo ad un valore di funzione analitica, e variando la linea (l) facendola tendere verso $W_{(l_i)}$, quel ramo di funzione analitica sarà rappresentato in un'area connessa sempre maggiore e tendente ad una delle parti connesse che costituiscono $W_{(l_i)}$. L'espressione della funzione analitica $\lambda(x)$ si può fare coincidere con

$$(5) \qquad \lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{(l_i)} \varphi(t)\, \alpha(t-x)\, dt.$$

Se accade che $W_{(l_i)}$ sia un'area connessa, la (5) rappresenterà in tutta $W_{(l_i)}$ una funzione analitica le cui singolarità o linee di discontinuità saranno esclusivamente nell'area $(U - V)_{(l_i)}$.

In particolare, se tanto l'insieme U delle singolarità di $\varphi(t)$ come quello V delle singolarità di $\alpha(t)$ constano di punti separati u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi, la $\lambda(x)$ sarà uniforme, coi soli punti singolari $u_i - v_j$. Se le $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ non sono uniformi, ma occorre tracciare dei tagli $u_i \dots u_h$, $v_j \dots v_k$ per stabilire la monodromia di un ramo di ciascuna di queste funzioni, anche $\lambda(x)$ sarà in generale uniforme, e ai tagli ora accennati corrisponderanno tagli $u_i - v_j \dots u_i - v_k$ e $u_i - v_j \dots u_h - v_j$.

4. Poichè tanto U′ che V′ contengono il punto all'infinito del piano-sfera, lo stesso sarà evidentemente di W_l; perciò, per $|x|$ abbastanza grande, la $\lambda(x)$ sarà sviluppabile in serie di potenze intere negative di x, mentre per $|t|$ abbastanza grande, si ha

$$\alpha(t) = \sum \frac{a_n}{t^{n+1}}, \quad \varphi(t) = \sum \frac{k_n}{t^{n+1}};$$

precisamente il primo di questi sviluppi vale per $|t| > r$, dove r è il massimo modulo dei punti v; il secondo per $|t| > r'$, essendo r' il massimo modulo dei punti u. Si prenda come linea l il cerchio (R), facendosi $R > r'$; indi si prenda

$$|x| > R + r.$$

Si avrà:

$$\alpha(t-x)=\sum\frac{a_n}{(t-x)^{n+1}}, \tag{6}$$

ed essendo $|t|>r'$, $|x|>\mathrm{R}+r>r'+r$, sarà $|t-x|>r$. Perciò la serie (6) si può sviluppare per le potenze decrescenti di x, dando lo sviluppo

$$\alpha(t-x)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_0 t^{\nu}-\nu a_{\nu-1}t^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}a_{\nu-2}t^{\nu-2}-\cdots+(-1)^{\nu}a_{\nu}\right)\frac{1}{x^{\nu+1}}$$

assolutamente ed uniformemente convergente per tutti i punti t del cerchio R e sotto la posta condizione $|x|>\mathrm{R}+r$. Sostituendo in (4) e integrando termine a termine, si ottiene:

$$\lambda(x)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_0 k_{\nu}-\nu a_1 k_{\nu-1}+\cdots+(-1)^{\nu}a_{\nu}k_0}{x^{\nu+1}}, \tag{7}$$

e questo sviluppo, valido per l'intorno di $x=\infty$, serve a definire mediante la continuazione analitica in tutta l'area $\mathrm{W}_{(l_i)}$, un ramo ad un valore di funzione analitica, le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti di $(\mathrm{U}-\mathrm{V})_{(l_i)}$. Nel caso che le singolarità di $\alpha(t)$ e $\varphi(t)$ siano punti isolati, u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni siano uniformi, la $\lambda(x)$ dà, colla continuazione analitica, una funzione pure uniforme e che può avere singolarità solo nei punti u_i-v_j: questo risultato contiene quello dell'Hurwitz come caso particolare.

5. Possiamo ora ottenere una formula che lega in modo analogo due funzioni date, in guisa cioè che le singolarità della funzione risultante dipendano colla stessa legge dianzi indicata da quelle delle funzioni componenti, mentre fra i coefficienti di questo nuovo sviluppo e quelli della (7) si presenta una correlazione notevole: quella stessa che ha luogo fra lo sviluppo binomiale per esponente intero positivo e quello per esponente intero negativo. A questo effetto, sia $\alpha(t)$ una funzione definita come precedentemente; sia $\varphi(t)$ una funzione o ramo di funzione analitica data regolare entro una stella U' di vertice $t=0$; $\varphi(t)$ ammetterà dunque, nell'intorno di $t=0$, uno sviluppo

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}k'_{\nu}t^{\nu}. \tag{8}$$

Indichiamo con U l'insieme dei punti posti al contorno o all'esterno della stella U'. Infine supponiamo che l'insieme V dei punti singolari v di $\alpha(t)$ sia tutto interno ad U'.

Descriviamo una linea l semplice, chiusa, tutta contenuta entro U', circondante il punto $t=0$ e racchiudente l'insieme V: sia U'_l l'area chiusa da l, U_l l'insieme dei punti esterni e sul contorno di l.

Per ogni punto u di U_l, costruiamo di ogni punto v di V il corrispondente punto $u - v$; l'insieme di questi punti costituirà un'area $U_l - V$, e tolta questa dal piano della variabile, resterà un'area W_l, in cui, per le ipotesi, è certamente contenuto il punto zero. Sia X_l la parte semplicemente connessa di W_l che contiene il punto zero; quando la linea l si deforma con continuità, avvicinandosi al contorno della stella U', si deformerà corrispondentemente, ampliandosi, anche l'area X_l, in guisa che se l è incluso in l_1, anche X_l fa parte di X_{l_1}. Fissiamo una posizione di l, sia ϱ la minima distanza di l dai punti di V, e descriviamo il cerchio (ϱ) di centro zero e raggio ϱ.

Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t - x)\, dt. \tag{9}$$

Per la scelta della linea d'integrazione e per essere preso x entro W_l, le singolarità di $\alpha(t - x)$ sono i punti $t = x + v$, che cadono tutti entro U'_l. Al contorno l, $\varphi(t)$ ed $\alpha(t - x)$ sono prive di singolarità, e pertanto $\lambda(x)$ rappresenta entro X_l un ramo ad un valore di funzione analitica, continuabile analiticamente in tutta la stella X di vertice $x = 0$ cui tende X_l quando U'_l tende ad U'. Ma, fatto $|x| < \varrho$, si può sviluppare $\alpha(t - x)$ collo sviluppo di Taylor

$$\alpha(t - x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} x^\nu \alpha^{(\nu)}(t)$$

e questo convergerà uniformemente per tutti i valori di t su l e di x entro (ϱ). Si potrà quindi integrare termine a termine, e verrà così lo sviluppo di $\lambda(x)$ in serie di potenze di x, valido entro (ϱ):

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu, \quad g_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\pi i\, \nu!}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha^{(\nu)}(t)\, dt. \tag{10}$$

La serie (10) è dedotta dalla (8) mediante un'operazione distributiva, appartenente al gruppo permutabile colla derivazione, nel modo stesso della (2), e la funzione analitica che essa definisce non può avere le sue singolarità fuori dei posti $u - v$. Se, in particolare, l'insieme delle singolarità U consta di un numero finito di aree semplicemente connesse finite, escludenti il punto $t = 0$, e più particolarmente ancora se consta di punti isolati, e se in U' e V', $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi e $\varphi(\infty) = 0$, la $\lambda(x)$ sarà una funzione uniforme che coincide all'infuori del segno, con quella definita al § 3.

6. La formula che si è annunciata al principio del § 5 per porla in riscontro colla (2), si deduce facilmente dalla (10). Supponiamo che il mas-

simo modulo dei punti v sia inferiore al minimo modulo dei punti u. In tale caso si può descrivere una linea l chiusa, circondante il punto $t=0$ ed i punti v, e tutta posta entro la corona circolare in cui convergono ad un tempo gli sviluppi $\sum k'_\nu t^\nu$ di $\varphi(t)$ in serie di potenze intere positive e $\sum \frac{a_\nu}{t^{\nu+1}}$ di $\alpha(t)$ in serie di potenze intere negative. Il coefficiente g_ν [formula (10)] viene allora dato da

$$g_\nu = a_0 k'_\nu + (\nu+1)\, a_1 k'_{\nu+1} + \binom{\nu+2}{2} a_2 k'_{\nu+2} + \cdots,$$

e si ottiene in tale guisa la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(a_0 k'_\nu + (\nu+1)\, a_1 k'_{\nu+1} + \cdots\right) x^\nu \tag{11}$$

come definizione di una funzione analitica che fa perfetto riscontro a quella definita dalla (7), con cui può anche coincidere come nel caso accennato alla fine del paragrafo precedente, e le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti $u-v$.

Non mi sembra fuori di luogo di insistere sul riscontro che passa fra le successioni dei coefficienti degli sviluppi (7) e (11); esse si possono rappresentare simbolicamente con

$$(a+k)^\nu \quad , \quad (a+k)^{-\nu}$$

formate con le successioni date a_ν e k_ν sviluppando secondo la regola binomiale e sostituendo, secondo un'ovvia convenzione, gli indici agli esponenti, e fra simili successioni, in più di un caso, viene fatto di notare un manifesto parallelismo.

7. Consideriamo la funzione $\varphi(t)$, uniforme, regolare nell'intorno di $t=\infty$ e che, per $|t|>r$, ammetta lo sviluppo

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{t^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Le singolarità di $\varphi(t)$ siano nei punti isolati $u_1, u_2, \ldots u_p$. Sia poi $\alpha(t,x)$ una funzione analitica delle due variabili t, x, regolare per tutte le coppie di valori delle variabili, ad eccezione di quelle che verificano una o più relazioni analitiche

$$\pi(t,x) = 0. \tag{13}$$

Si circondino i punti singolari u_i di $\varphi(t)$ mediante una linea finita l chiusa e semplice o composta di un numero finito di curve semplici chiuse non includentisi nè intersecantisi; indichiamo con U_l l'area (di uno o più pezzi) racchiusa da l; sia $\bar{u}$ un punto generico di U_l o del contorno. Ad ogni punto $\bar{u}$, la relazione

$$\pi(\bar{u}, x) = 0 \tag{14}$$

fa corrispondere un sistema di punti x che, quando $\bar{u}$ descrive U_l ed il contorno, descrivono nel piano x un sistema di aree che indicheremo con V_l. Se la linea l si deforma, restringendosi, e tendendo ad un sistema di p cerchi (u_i) di centri u_i e di raggi piccoli a piacere, varieranno in corrispondenza le aree V_l, tendendo ad un sistema di aree V_i; sia X_l ciò che rimane dal piano x togliendovi V_l, X_i ciò che rimane togliendovi V_i; è chiaro che X_l è compreso in X_i, mentre da X_i sono esclusi, in generale con aree piccole a piacere, i punti radici delle equazioni

$$\pi(u_i, x) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots p). \tag{15}$$

Consideriamo ora l'integrale, in cui l è percorsa nel senso positivo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt. \tag{16}$$

Per ogni punto x di X_l, non cade alcuna singolarità di $\alpha(t, x)$ sulla linea l nè nel campo U_l da essa racchiuso, poichè se $\bar{u}$ fosse una tale singolarità, x sarebbe radice della (14), cioè apparterrebbe a V_l. Perciò, per x in X_l, l'integrale (16) è uguale a

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{p}\int_{(u_i)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt, \tag{17}$$

e se i punti radici delle (15) sono separati, $\lambda(x)$ è una funzione analitica, rappresentata da (16) entro X_l e da (17) entro tutto X_i.

Ciò posto, abbiasi per $\alpha(t, x)$ uno sviluppo in serie di potenze di t

$$\alpha(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x)\, t^\nu; \tag{18}$$

le $\alpha_\nu(x)$ sono funzioni analitiche determinate ed il raggio di convergenza dello sviluppo è, in generale, funzione di x: ad un raggio di convergenza superiore ad un numero positivo c corrisponde un campo R_c nel piano x, e per $c' > c$, $R_{c'}$ è contenuto in R_c. Per un dato t, $|t| < c$ e per x in R_c, la serie (18) converge uniformemente ([1]).

([1]) V. la mia Memoria: *Sui sistemi di funzioni analitiche*. Ann. di Mat., S. II, T. XII.

Ora, sia c il massimo modulo dei punti della linea l; si prenda x nel campo Z comune ad R_c e ad X_l; per tali valori di x si ha:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t\,,\,x)\, dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x) \int_{(l)} \varphi(t)\, t^\nu\, dt$$

e quindi

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\, \alpha_\nu(x)\,. \tag{19}$$

Entro il campo Z, la funzione $\lambda(x)$ è dunque rappresentata dallo sviluppo (19), convergente uniformemente; se ne conclude che « una serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\, \alpha_\nu(x)\,,$$

« dove le k_ν sono i coefficienti nello sviluppo (12) di una funzione uniforme $\varphi(t)$ di cui le u_i sono i punti singolari, definisce una funzione i cui punti singolari sono soltanto le radici delle equazioni (15) ». Come caso particolare si ottiene facilmente una notevole proposizione che mi è stata cortesemente comunicata, di recente, per lettera, dal sig. dott. G. Faber di Carlsruhe: che cioè se le $\alpha_\nu(x)$ sono i polinomi di Legendre, i punti singolari della funzione definita da (19) sono soltanto quelli della forma

$$\frac{1}{2}\left(u_i + \frac{1}{u_i}\right).$$

Matematica. — *Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto*. Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Fisica. — *Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas*. Nota del Socio Augusto Righi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.