ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Socio U. DINI.

La risoluzione del problema di Dirichlet in un campo finito col metodo di Fredholm (1), dipende dalla considerazione di un'equazione funzionale, la quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che la corrispondente equazione omogenea non ne ammette alcuna. Similmente l'integrazione delle equazioni dell'isotropia elastica in un campo finito, nel caso di dati spostamenti in superficie, si può far dipendere dalla considerazione di un sistema di equazioni funzionali (2), il quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che il corrispondente sistema omogeneo non ne ammette alcuna.

Volendo estendere il metodo di Fredholm alla risoluzione del problema di Dirichlet in un campo infinito, l'equazione funzionale, che per analogia bisogna considerare, è tale invece che la corrispondente equazione omogenea ammette già una soluzione evidente; sicchè l'equazione non omogenea almeno in generale non ne ammette alcuna. La medesima difficoltà si presenta, quando si voglia estendere il metodo, esposto nella mia citata Nota, al caso dei solidi elastici indefiniti.

Qui mi propongo di dimostrare che tanto il metodo di Fredholm per la risoluzione del problema di Dirichlet, quanto quello da me dato per l'integrazione delle equazioni della isotropia elastica, convenientemente adoperati, servono ancora nel caso dei campi infiniti.

In ciò che segue, indicherò con i simboli $(F)_1$, $(F)_2$ rispettivamente la citata Nota del sig. Fredholm e la sua Memoria degli Acta mathematica (t. 27): *Sur une classe d'équations fonctionnelles*; col simbolo (L) la mia citata Nota.

ART. I. — *Problema di Dirichlet in un campo infinito.*

1. Sia C una curva chiusa, la quale goda delle seguenti proprietà:

1° ammette la tangente determinata in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° esiste una lunghezza D tale che, preso un punto s qualsiasi di C e considerate le due parallele alla normale in s e distanti da essa del seg-

(1) *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm.

(2) Vedi la mia Nota: *Sull'integrazione delle equazioni dell'equi...*, Rendic. della R. Acc. dei Lincei, aprile 1906.

mento D, la posizione C_D di C compresa tra queste parallele sia incontrata in un punto al più da qualunque altra parallela alla detta normale:

3° esiste un numero finito positivo a tale che, indicando con ϑ l'angolo che la normale n in s fa con la normale n_0 in un altro punto qualsiasi s_0 di C e indicando con r_0 la distanza ss_0, si abbia:

$$\vartheta < ar_0.$$

Queste condizioni ci autorizzano a ritenere validi per la linea C i noti teoremi sugli *strati* e *doppi strati lineari*.

2. Sia $\psi(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C, data ad arbitrio. Si consideri l'equazione funzionale:

$$(1) \qquad \psi(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\,\varphi(s)\,ds,$$

con $\varphi(s)$ funzione incognita. Questa equazione è tale che la corrispondente equazione omogenea:

$$(1)' \qquad 0 = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\,\varphi_1(s)\,ds$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(s) = 1$; di modo che il *determinante* D [1] dell'equazione (1) è nullo [2]; e quindi l'equazione (1) in generale non ammette soluzione alcuna [3].

Dimostriamo anzitutto che l'equazione (1)' non ammette alcuna altra soluzione linearmente indipendente da quella già notata; ossia che *qualunque funzione* $\varphi_1(s)$ *finita e continua, la quale soddisfa alla* (1)', *deve necessariamente essere costante*.

Infatti indichiamo con r il segmento che congiunge un punto (x, y) qualsiasi del piano con un punto variabile $s \equiv (\xi, \eta)$ di C; e consideriamo il *doppio strato lineare*:

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r}{dn}\,\varphi_1(s)\,ds.$$

Chiamando $p' \equiv (x, y)$ un punto del campo infinito σ' limitato da C; $p \equiv (x, y)$ un punto del campo finito σ; s_0 un punto di C, si ha, come è noto,

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\,\varphi_1(s)\,ds,$$

$$\lim_{p=s} V(x, y) = -\varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\,\varphi_1(s)\,ds;$$

(1) Questa è la denominazione introdotta dal sig. Fredholm nella (F), pag. 41.

(2) Vedi $(F)_2$, pag. 375.

(3) Ibid., pag. 377.

e in virtù della (1)′:

(2) $$\lim_{p'=s_0} V(x\,,y) = 0 \quad , \quad \lim_{p=s_0} V(x\,,y) = -\,2\varphi_1(s_0).$$

Adunque la funzione armonica $V(x\,,y)$ è nulla nei punti di σ'; sicchè la $\frac{dV}{dn}$, calcolata dalla parte di σ', sarà nulla in tutti i punti di C, e, in forza di un noto teorema di Liapounoff, sarà $\frac{dV}{dn} = 0$ anche dalla parte di σ. Ne segue allora che la funzione $V(x\,.\,y)$ è costante in tutto il campo σ, e, in virtù della seconda delle (2), $\varphi_1(s) = \text{cost.}$

3. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm [1] ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, è che, per la funzione data* $\psi(s)$, *si abbia*:

(3) $$\int_C \psi(s)\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,,$$

dove $\Psi_1(s)$ *è una certa funzione finita e continua, che dipende dalla funzione* $\frac{d \lg r_0}{dn}$.

Supposto adunque che la $\psi(s)$ verifichi la (3) e che $\varphi(s)$ sia la corrispondente soluzione finita e continua della (1), si consideri il *doppio strato lineare*:

(4) $$V(x\,,y) = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r}{dn}\, \varphi(s)\, ds.$$

Si ha:

$$\lim_{p'=s_0} V(x\,,y) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\, \varphi(s)\, ds = \psi(s_0)\,.$$

Quindi, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *verifica la* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (4).

4. Nel caso in cui la funzione data $\psi(s)$ non verifica la (3), indicando con r'_0 il segmento variabile, che congiunge un punto fisso qualsiasi p interno a σ con un punto variabile s di C, si può determinare una costante A in modo che sia:

(3)′ $$\int_C \{\psi(s) - A \log r'_0\}\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,,$$

a meno che non si avesse:

$$\int_C \lg r'_0 \,.\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,.$$

[1] Vedi (F)₂, pag. 378.

Ma in questo caso, soddisfacendo la funzione $\log r'_0$ alla condizione (3), avremmo che la funzione armonica del campo σ', la quale nei punti di C coincide con la funzione $\log r'_0$, ossia la funzione $\log r'$, dove r' indica il segmento congiungente il punto fisso p col punto variabile p' del campo σ', dovrebbe, in virtù del risultato del § precedente, potersi rappresentare mediante un *doppio strato lineare*, ciò che, come è notorio, non è possibile. Quindi *il coefficiente di* A *nell'equazione* (3)' *è sempre diverso da zero.*

Determinata adunque la costante A nel modo anzidetto, si consideri l'equazione funzionale:

$$(1)'' \qquad \psi(s_0) - \mathrm{A} \log r'_0(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_c \frac{d \lg r_0}{dn} \varphi(s)\, ds .$$

Questa equazione, in virtù della (3)', ammette una soluzione $\varphi(s)$, e la funzione:

$$(5) \qquad \mathrm{V}'(x, y) = \mathrm{A} \log r' + \frac{1}{\pi} \int_c \frac{d \lg r}{dn} \varphi(s)\, ds ,$$

con essa costruita, ci dà:

$$\lim_{p'=s_0} \mathrm{V}'(x, y) = \mathrm{A} \log r'_0(s_0) + \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_c \frac{d \lg r_0}{dn} \varphi(s)\, ds = \psi(s_0) .$$

Dunque, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *non verifica la condizione* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (5).

Art. II. — *Integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.*

5. Riprendiamo qui le notazioni introdotte nella (L) e le condizioni ivi poste sulla natura della superficie σ; e aggiungiamo, ai risultati stabiliti nel § 1 della (L), i due segmenti:

1°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio indefinito S', che a distanza infinita si annullino come l'inversa della distanza di un punto fisso dal punto variabile (x, y, z) e le loro derivate prime come il quadrato di questa inversa, e che nei punti di σ si abbia:

$$u = v = w = 0 .$$

Risulta immediatamente dalle (2), (3) della (L) per $k > -\dfrac{2}{3}$:

$$(\text{in tutto S}') \qquad u = v = w = 0 .$$

2°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio S, e che nei punti di σ si abbia:

$$\mathrm{X}_\sigma = \mathrm{Y}_\sigma = \mathrm{Z}_\sigma = 0 .$$

Risulta anche qui dalle (2), (3) della (L) per $k > -\frac{2}{3}$, indicando con a, b, c tre costanti arbitrarie,

$$\text{(in tutto S)} \qquad u = a \quad , \quad v = b \quad , \quad w = c .$$

6. Siano $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ tre funzioni finite e continue dei punti di σ, date ad arbitrio. Si consideri il sistema di equazioni funzionali [1]:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} -u(\alpha_0, \beta_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ & X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi(\alpha, \beta) + \\ & + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \chi(\alpha, \beta) \} \, d\sigma , \\ -v(\alpha_0, \beta_0) = \psi(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ & X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned} \right.$$

con $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ funzioni incognite. Questo sistema di equazioni è tale che il corrispondente sistema omogeneo:

$$(6)' \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ & X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \\ & + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \psi_1(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma , \\ 0 = \psi_1(\alpha_0, \beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ & X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(\alpha, \beta) = a$, $\psi_1(\alpha, \beta) = b$, $\chi_1(\alpha, \beta) = c$, con a, b, c costanti arbitrarie; di modo che il sistema (6) in generale non ammette soluzione alcuna [2].

Dimostriamo anzitutto che *qualunque soluzione delle* (6)′ *deve necessariamente essere costante*. Infatti formino le funzioni finite e continue $\varphi_1(\alpha, \beta)$, $\psi_1(\alpha, \beta)$, $\chi_1(\alpha, \beta)$ una soluzione del sistema (6)′. Si considerino le espressioni:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ X'_\sigma \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + Y'_\sigma \,.\, \psi_1(\alpha, \beta) + Z'_\sigma \,.\, \chi_1(\alpha, \beta) \} \, d\sigma , \\ \Psi_1(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{ X''_\sigma \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma , \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

(1) Cfr. le equazioni (11) della (L) e l'equazione (1) dell'Art. I.

(2) Vedi $(F)_2$, pag. 378, 379.

Posto $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$, si ha, in virtù delle (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = -\varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$\lim_{p=p_0} \Phi_1(x, y, z) = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

e quindi, in forza delle (6)′,

$$(8)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = 0\ ,\ \lim\limits_{p'=p_0} \Psi_1(x, y, z) = 0\ ,\ \lim\limits_{p'=p_0} X_1(x, y, z) = 0\,; \\ \lim\limits_{p=p_0} \Phi_1(x, y, z) = 2\varphi_1(\alpha_0, \beta_0)\ ,\ \lim\limits_{p=p_0} \Psi_1(x, y, z) = 2\psi_1(\alpha_0, \beta_0), \ldots \end{cases}$$

Adunque le funzioni $\Phi_1(x, y, z)$, $\Psi_1(x, y, z)$, $X_1(x, y, z)$, considerate come funzioni dei punti di S′, sono integrali delle equazioni (1) della (L) e nei punti di σ prendono valori nulli; sicchè, in forza del 1° risultato al § 5, si ha:

$$(\text{in tutto S}') \qquad \Phi_1(x, y, z) = \Psi_1(x, y, z) = X_1(x, y, z) = 0\,;$$

e quindi le corrispondenti espressioni (9) della (L):

$$P_1(x, y, z)_0\ ,\quad Q_1(x, y, z)_0\ ,\quad R_1(x, y, z)_0$$

saranno nulle qualunque sia il punto $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$ di σ e qualunque sia il punto $p' \equiv (x, y, z)$ di S′. Avremo dunque:

$$\lim_{p'=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0\,;$$

e, in virtù dell'ultimo teorema al § 3 della (L),

$$\lim_{p=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0\,.$$

Queste espressioni rappresentano le X_σ, Y_σ, Z_σ, corrispondenti agli integrali (7) delle equazioni (1) della (L), considerati come funzioni dei punti (x, y, z) del campo finito S; per cui risulterà, in forza del 2° risultato al § 5,

$$(\text{in tutto S}) \qquad \Phi_1(x, y, z) = 2a\ ,\ \Psi_1(x, y, z) = 2b\ ,\ X_1(x, y, z) = 2c\,,$$

con a, b, c costanti arbitrarie; e quindi, in causa delle (8),

$$\varphi_1(\alpha\ \beta) = a\ ,\ \psi_1(\alpha, \beta) = b\ ,\ \chi_1(\alpha, \beta) = c\,.$$

Adunque le equazioni omogenee (6)′ non ammettono alcuna altra soluzione, all'infuori di quella già segnalata.

7. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm sulle equazioni funzionali ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema di equazioni* (6) *ammetta una soluzione, è che le funzioni date* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ *soddisfino alla condizione*:

$$(9) \quad \int_\sigma \{ u(\alpha, \beta) \,.\, \Psi_1(\alpha, \beta) + v(\alpha, \beta)\, \Psi_1'(\alpha, \beta) + w(\alpha, \beta)\, \Psi_1''(\alpha, \beta) \} \, d\sigma = 0 ,$$

dove $\Psi_1(\alpha, \beta)$, $\Psi_1'(\alpha, \beta)$, $\Psi_1''(\alpha, \beta)$ *sono una terna di funzioni finite e continue, dipendenti dalle funzioni* $X_\sigma'(\alpha, \beta ; \alpha_0, \beta_0)$, $Y_\sigma'(\alpha, \beta ; \alpha_0, \beta_0), \ldots ;$ $X_\sigma''(\alpha, \beta ; \alpha_0, \beta_0), \ldots ;$ $X_\sigma'''(\alpha, \beta ; \alpha_0, \beta_0), \ldots$.

Supposto adunque che le funzioni date $u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)$ soddisfino alla condizione (9) e che $\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta), \chi(\alpha, \beta)$ siano le corrispondenti funzioni finite e continue che soddisfano al sistema (6), si considerino le funzioni:

$$(10) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{ X_\sigma' \,.\, \varphi(\alpha, \beta) + Y_\sigma' \,.\, \psi(\alpha, \beta) + Z_\sigma' \,.\, \chi(\alpha, \beta) \} \, d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Esse soddisfano alle equazioni (1) della (L) e ci dànno, in virtù delle (8) della (L) e delle equazioni (6),

$$\lim_{p'=p_0} u(x, y, z) = - \varphi(\alpha_0, \beta_0) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{ X_\sigma'(\alpha, \beta ; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma = u(\alpha_0, \beta_0) ,$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x, y, z) = v(\alpha_0, \beta_0) \quad , \quad \lim_{p'=p_0} w(x, y, z) = w(\alpha_0, \beta_0) .$$

Quindi *le funzioni* $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$, *date dalle* (10), *rappresentano nel campo* S' *per* $k > -\frac{2}{3}$ *gli integrali delle equazioni dell'equilibrio, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)$.

8. Nel caso in cui le funzioni date $u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)$ non soddisfano alla condizione (9), indicando con r' il segmento variabile, che congiunge un punto fisso p qualsiasi dell'interno di S con i punti (x, y, z) del campo S' (quelli (α, β) di σ inclusi), e ponendo:

$$u_1(x, y, z) = \frac{1}{r'} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x^2} , \quad v_1(x, y, z) = - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x \, \partial y} ,$$
$$w_1(x, y, z) = - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x \, \partial z} ,$$

si può determinare una costante A in modo che si abbia:

$$(11) \quad \int_\sigma \Big[\{u(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1(\alpha,\beta) + \{v(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,v_1(\alpha,\beta)\}\Psi'_1(\alpha,\beta) + \\ + \{w(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,w_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi''_1(\alpha,\beta)\Big]\,d\sigma = 0\,,$$

a meno che non sia:

$$\int_\sigma \{u_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1(\alpha,\beta) + v_1(\alpha,\beta)\,\Psi'_1(\alpha,\beta) + w_1(\alpha,\beta)\,\Psi''_1(\alpha,\beta)\}\,d\sigma = 0\,.$$

Ma in questo caso le funzioni $u_1(x,y,z)$, $v_1(x,y,z)$, $w_1(x,y,z)$, che nei punti del campo infinito S′ soddisfano alle equazioni dell'equilibrio, verificherebbero la condizione (9); e quindi dovrebbero potersi rappresentare per mezzo delle formole (10). Ora è facile vedere che ciò non è possibile; infatti basterà osservare che le funzioni rappresentabili mediante le (10) a distanza infinita divengono infinitesime come $\frac{1}{r'^2}$, mentre p. es. la $u_1(x,y,z)$ a distanza infinita, nei punti del piano normale all'asse delle x passante per p, diventa infinitesima come $\frac{1}{r'}$. Ne concludiamo che *il coefficiente di* A *nella equazione* (11) *è sempre diverso da zero.*

Determinata la costante A per mezzo della (11), e posto:

$$(12) \quad \begin{cases} \overline{u}(\alpha,\beta) = u(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{v}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,v_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{w}(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,w_1(\alpha,\beta)\,, \end{cases}$$

si considerino le equazioni funzionali:

$$(6)'' \quad \begin{cases} -\overline{u}(\alpha_0,\beta_0) = \varphi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ -\overline{v}(\alpha_0,\beta_0) = \psi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

In forza della (11) queste equazioni ammettono una soluzione $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$; e posto:

$$(13) \quad \begin{cases} u(x,y,z) = \mathrm{A}\,.\,u_1(x,y,z) + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}'_\sigma\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \mathrm{Y}'_\sigma\,.\,\psi(\alpha,\beta) + \mathrm{Z}'_\sigma\,.\,\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma\,, \\ v(x,y,z) = \mathrm{A}\,.\,v_1(x,y,z) + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}''_\sigma\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \mathrm{Y}''_\sigma\,.\,\psi(\alpha,\beta) + \mathrm{Z}''_\sigma\,.\,\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

si avrà, in virtù delle (6)'', delle (12) e delle formole (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} u(x\,,y\,,z) = \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha_0\,,\beta_0) - \varphi(\alpha_0\,,\beta_0) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}'_\sigma(\alpha\,,\beta\,;\alpha_0\,,\beta_0)\,\varphi(\alpha\,,\beta)+\cdots\}\,d\sigma = \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha_0\,,\beta_0)+\overline{u}(\alpha_0\,,\beta_0)=u(\alpha_0\,,\beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x\,,y\,,z) = v(\alpha_0\,,\beta_0)\quad,\quad \lim_{p'=p_0} w(x\,,y\,,z) = w(\alpha_0\,,\beta_0)\,.$$

Dunque *le funzioni* $u(x\,,y\,,z)\,,\,v(x\,,y\,,z)\,,\,w(x\,,y\,,z)$, *date dalle formole* (13), *per* $k > -\frac{2}{3}$ *rappresentano nei punti del campo infinito* S' *gli integrali dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha\,,\beta)\,,\,v(\alpha\,,\beta)\,,\,w(\alpha\,,\beta)$.

Meccanica. — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatistica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità.* Nota di G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Nota del prof. Marino Pannelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In una precedente Nota (¹) ho dimostrato l'esistenza di alcuni invarianti numerici di una varietà algebrica a tre dimensioni; in questa, studio il loro modo di comportarsi rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà (²).

1. Si trasformi dunque birazionalmente la varietà W, supposta immersa in un iperspazio e priva di elementi singolari, in un'altra W'. In W si abbiano σ punti $\mathrm{T}_h (h = 1\,,2\,,3\,,\ldots\,\sigma)$ e τ curve $\mathrm{R}_k (k = 1\,,2\,,3\,,\ldots\,\tau)$ fondamentali per la trasformazione. Sia ϱ_k il genere di un curva R_k, λ_{hk} il numero dei suoi rami passanti per T_h ed i_k il suo grado di multiplicità per

(¹) *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906.

(²) Le dimostrazioni dei risultati qui esposti sono in alcuni punti forse troppo concise; ciò è dovuto soltanto alla ristrettezza dello spazio concessomi. Così non ho potuto riprodurre gli esempi esaminati per chiarire e confermare i risultati stessi.